Cuprins

Partea I

Fundamentele Matematice

Capitolul 1

Algebre Hopf. Spectre de Inele

1.1 Algebre, Coalgebre, Bialgebre, Algebre Hopf

Fie A un inel comutativ. Dându-se un inel B şi un morfism de inele $\eta_B : k \to B$, inelul B poate fi văzut ca un B-modul la stânga via multiplicarea din inel, de la care construim A-modulul la stânga notat $(\eta_B)B$. Acţiunea sa va fi notată ax pentru $a \in A$ şi $x \in B$, cu: $ax = \eta_B(a)x$. Dacă avem $(ax)y = x(ay) = a(xy)$, pentru $a \in A$ şi $x, y \in B$, atunci B se zice că este o A-algebră. Atunci putem construi funcţia biliniară $f : B \times B \to B$, $f(x, y) = xy$ şi morfismul de A-module $\mu_B : B \otimes B \to B$ şi $\eta_B : k \to B$ morfisme de A-module. Dacă următoarele diagrame comută, atunci B este o A-algebră cu μ_B *funcţia de multiplicare*, η_B *funcţia unitate* şi perechea (μ_B, η_B) *funcţii de structură* ale A-algebrei B:

(1) legea de asociativitate:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B \otimes B & \xrightarrow{1\otimes\mu_B} & B \otimes B \\ {\scriptstyle \mu_B\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} \\ B \otimes B & \xrightarrow{\mu_B} & B \end{array}$$

care corespunde relaţiei:

$$\mu_B(1 \otimes \mu_B) = \mu_B(\mu_B \otimes 1)$$

(2) proprietatea de unitaritate:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes B & \xrightarrow{\eta_B\otimes 1} & B \otimes B & \xleftarrow{1\otimes\eta_B} & B \otimes A \\ \wr & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} & & \wr \\ B & = & B & = & B \end{array}$$

unde am identificat $A \otimes B$ şi $B \otimes A$ cu B, şi care corespunde relaţiei:

$$\mu_B(1 \otimes \eta_B) = \mu_B(\eta_B \otimes 1)$$

Fie B, C două A-algebre. Dacă o funcţie $u : B \to C$ este un morfism de inele cât şi un morfism de A-module, atunci numim u un *morfism de A-algebre*. Echivalent, u este un morfism de A-algebre dacă şi numai dacă următoarele diagrame comută:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\mu_B} & B \\ {\scriptstyle u\otimes u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ C \otimes C & \xrightarrow{\mu_C} & C \end{array} \qquad u \circ \mu_B = \mu_C \circ (u \otimes u)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_B} & B \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ A & \xrightarrow{\eta_C} & C \end{array} \qquad u \circ \eta_B = \eta_C$$

A-modulul $B \otimes C$ devine o A-algebră (numită *produsul tensorial* al lui B cu C) cu funcţiile de structură date de:

$$\mu_{B\otimes C} = \mu_B \otimes \mu_C(1 \otimes \tau \otimes 1)$$

$$\eta_{B\otimes C} = \eta_B \otimes \eta_C$$

unde $\tau : C \otimes B \to B \otimes C$, $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. În fapt, relaţiile de mai sus conduc la:

$$\mu_{B\otimes C}((x \otimes y)(x' \otimes y')) = xx' \otimes yy'$$

$$\eta_{B\otimes C}(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \equiv 1$$

Dacă B şi C sunt A-algebre comutative, atunci $B \otimes C$ este suma directă a lui B cu C în categoria M_A a A-algebrelor comutative.

Considerăm de acum înainte k un corp comutativ, dacă altfel nu este specificat. De fapt în aplicaţii vom considera $k = \mathbf{C}$, corpul numerelor complexe. Notăm prin $Mod_k(B, C)$ mulţimea k-morfismelor de la modulul B la C. Definim o k-coalgebră ca fiind duala unei k-algebre:

Dându-se un k-spaţiu vectorial C şi funcţii k-liniare $\Delta_c \in Mod(C, C \otimes C)$ şi $\varepsilon_C \in Mod(C, k)$, numim sistemul $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ sau simplu C o *k-coalgebră* dacă următoarele diagrame comută:

(1) legea de coasociativitate:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta_C \otimes 1} & C \otimes C \\ {\scriptstyle 1\otimes\Delta_C} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \Delta_C} \\ C \otimes C & \xleftarrow{\Delta_C} & C \end{array}$$

(2) proprietatea de counitaritate:

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon_c \otimes 1} & C \otimes C & \xrightarrow{1\otimes\varepsilon_C} & C \otimes k \\ \wr & & \uparrow {\scriptstyle \Delta_C} & & \wr \\ C & = & C & = & C \end{array}$$

Funcţia Δ_C se numeşte *funcţia de comultiplicare*, iar ε_C *funcţia de counitate*; împreună formează *funcţiile de structură* ale k-coalgebrei C.

Pentru un $x \in C$ notăm formal (convenţiile lui Sweedler):

$$\Delta_C(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \otimes x_{2i} \equiv \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$$

Atunci cele două diagrame se transpun în relaţiile:

$$\sum_{(x)} \Delta_C(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes \Delta_C(x_{(2)})$$

$$\sum_{(x)} \varepsilon_C(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} \simeq \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes \varepsilon_C(x_{(2)})$$

şi atunci vom scrie pentru prima egalitate de mai sus: $\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$.

Presupunem date cele două k-coalgebre $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ şi $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$. O funcţie k-liniară $\sigma : C \to D$ făcând următoarele diagrame comutative:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C & \xrightarrow{\sigma\otimes\sigma} & D \otimes D \\ {\scriptstyle \Delta_C} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \Delta_D} \\ C & \xrightarrow{\sigma} & D \end{array} \qquad \Delta_D \circ \sigma = (\sigma \otimes \sigma) \circ \Delta_C$$

$$\begin{array}{ccc} k & \xleftarrow{\varepsilon_C} & C \\ \| & & \downarrow \sigma \\ k & \xleftarrow{\varepsilon_D} & D \end{array} \qquad \varepsilon_D \circ \sigma = \varepsilon_C$$

este numită *morfism de k-coalgebre.*

Notăm categoria k-coalgebrelor prin Cog_k şi mulţimea tuturor morfismelor de k-coalgebre de la C la D prin $Cog_k(C, D)$. Pentru M, N k-spaţii vectoriale notăm cu

$\tau : N \otimes M \to M \otimes N$ morfismul $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Atunci o k-coalgebră C se zice *cocomutativă* dacă diagrama următoare este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta_C} & C \otimes C \\ \| & & \downarrow \tau \\ C & \xrightarrow{\Delta_C} & C \otimes C \end{array} \qquad\qquad \tau \circ \Delta_C = \Delta_C$$

Pentru $C, D \in Cog_k$ produsul tensorial de k-spaţii vectoriale $C \otimes D$ devine o k-coalgebră cu funcţiile de structură:

$$\Delta_{C \otimes D} = (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

$$\varepsilon_{C \otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$$

pe care îl numim *produsul tensorial al lui C cu D*.

Fie $D \subset C$ un k-spaţiu vectorial. Dacă $\Delta_C \subset D \otimes D$ atunci D devine o k-coalgebră cu restricţiile lui Δ_C, ε_C la D ca funcţii structurale. Un astfel de D se numeşte o *k-subcoalgebră*. Scufundarea canonică $D \to C$ este un morfism de k-coalgebre.

Fie M, N două k-spaţii vectoriale. Notăm cu M^*, N^* dualele lor (algebrice). Definim $\rho : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$ un morfism injectiv prin:

$$\rho(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$$

Pentru o k-coalgebră (C, Δ, ε) fie $C^* = Mod_k(C, k)$. Atunci definind:

$$\mu : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

$$\eta : k \simeq k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$$

obţinem că (C^*, μ, η) devine o k-algebră pe care o numim *k-algebra duală* lui C. În general ρ nu este un izomorfism şi nu putem defini în mod similar o structură de k-coalgebră pe k-spaţiul vectorial dual A^* al unei k-algebre A. Totuşi, dacă A este un k-spaţiu vectorial de dimensiune finită, atunci $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ devine un izomorfism de k-spaţii vectoriale şi punând $\Delta = \rho^{-1} \circ \mu^*$ şi $\varepsilon = \eta^*$ (unde indentificăm pe k cu k^*), vedem că $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ devine o k-coalgebră numită *k-coalgebra duală lui A*.

TEOREMA 1.1 *Dându-se un k spaţiu vectorial H, presupunem că există funcţiile k-liniare:*

$$\mu : H \otimes H \to H \ , \ \eta : k \to H \ , \ \Delta : H \to H \otimes H \ , \ \varepsilon : H \to k$$

astfel încât (H, μ, η) este o k-algebră şi (H, Δ, ε) este o k-coalgebră. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

(i) μ, η sunt morfisme de k-coalgebre

(ii) Δ, ε sunt morfisme de k-algebre

(iii) $\Delta(gh) = \sum g_{(1)}h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)}$, $\Delta(1) = 1$

$\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$, $\varepsilon(1) = 1$ □

(pentru demonstraţie vezi [Abe80]).

Un k-spaţiu liniar H împreună cu funcţiile k-liniare $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ ca în teorema de mai sus se numeşte o *k-bialgebră*.

Fie H, K două k-bialgebre şi $\sigma : H \to K$ simultan un morfism de k-algebre şi comorfism de k-coalgebre. Atunci σ se numeşte *morfism de k-bialgebre*. Categoria k-bialgebrelor este notată prin Big_k iar mulţimea tuturor k-bialgebrelor de la H la K este notată prin $Big_k(H, K)$

Un spaţiu vectorial care este atât k-subalgebră cât şi k-subcoalgebră a lui H este numit *k-subbialgebră a lui H*. Mai mult, dacă H este finit dimensională şi este o k-bialgebră, putem construi H^* *k-bialgebra duală* lui H.

Un element c al unei k-coalgebre C (respectiv k-bialgebre C) astfel încât $\varepsilon(c) = 1$ şi $\Delta(c) = c \otimes c$ se numeşte element *de tip grup*. Notăm mulţimea tuturor elementelor de tip grup ale lui C prin $G(C)$. Următorul rezultat caracterizează mulţimea $G(C)$ (pentru demonstraţie recomandăm [Abe80]):

TEOREMA 1.2 *(i) Fie C o k-algebră. Elementele lui $G(C)$ sunt liniar independente peste k.*

(ii) Când H este o k-bialgebră, $G(H)$ este semigrup faţă de multiplicare şi k-subspaţiul vectorial al lui H generat de $G(H)$ este o k-subbialgebră a lui H. □

Un element c al unei k-bialgebre C (respectiv k-coalgebre C care are doar un element de tip grup i.e. $G(C) = \{g\}$) care satisface relaţia:

$$\Delta c = c \otimes 1 + 1 \otimes c \quad (\text{respectiv } \Delta c = c \otimes g + g \otimes c)$$

este numit *element primitiv* sau *element de tip Lie*. Mulţimea tuturor elementelor primitive o vom nota-o cu $P(C)$. Următorul rezultat (a cărui demonstraţie se găseşte tot în [Abe80]) furnizează o caracterizare a lui $P(C)$:

TEOREMA 1.3 *Dacă H este o k-bialgebră atunci $P(H)$ este un k-spaţiu vectorial a lui H şi pentru orice $x, y \in P(H)$ avem $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} xy - yx \in P(H)$. Astfel $P(H)$ are o structură de k-algebră Lie. Mai mult, dacă $x \in P(H)$, $\varepsilon(x) = 0$.* $\Box$

Observaţie k-subalgebra generată de $P(H)$ este o k-subbialgebră a lui H şi, când caracteristica lui k este 0, H_1 este izomorfă cu k-bialgebra înfăşurătoare universală $U(P(H))$ a lui $P(H)$.

Pentru o k-coalgebră C şi o k-algebră A punem $R = Mod_k(C, A)$. Dacă $f, g \in R$ atunci:

$$f \star g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_c$$

se numeşte *convoluţia* lui f cu g. Dacă $x \in G(C)$ atunci $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$. De fapt R devine o k-algebră cu $\mu_R(f \otimes g) = f \star g$ şi $\eta_R(\alpha) = \alpha\eta_A \circ \varepsilon_C$. Fie H o k-bialgebră. Fie H^A şi H^C notaţii pentru, respectiv, H privit fie ca o k-algebră fie ca o k-coalgebră şi fie $R = Mod_k(H^C, H^A)$ cu structura de k-algebră definită mai sus. Când funcţia identitate 1 a lui H ($1 \in R$) admite un element invers S ($S \in R$), numim S *antipodul* lui H. Atunci S este antipod dacă satisface una din următoarele condiţii echivalente:

$$S \star 1 = 1 \star S = \eta \circ \varepsilon = 1_R$$

$$\mu \circ (S \otimes 1) \circ \Delta = \mu \circ (1 \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$

O k-bialgebră cu antipod se numeşte *k-algebră Hopf*.

Fie H, K k-algebre Hopf şi fie S_H, S_K ,respectiv, antipozii lor. Dacă un morfism de k-bialgebre $\sigma : H \to K$ face diagrama următoare comutativă:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{S_K} & K \\ {\scriptstyle\sigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\sigma} \\ H & \xrightarrow{S_H} & H \end{array} \qquad\qquad S_K \circ \sigma = \sigma \circ S_H$$

atunci σ se numeşte *morfism de k-algebre Hopf.* Categoria k-algebrelor Hopf este notată prin $Hopf_k$ iar mulţimea tuturor morfismelor de k-algebre Hopf de la H la K prin $Hopf_k(H, K)$.

Următorul rezultat precizează proprietăţile antipozilor:

TEOREMA 1.4 *Următoarele proprietăţi au loc pentru antipodul S al unei k-algebre Hopf H:*

i) $S(gh) = S(h)S(g)$ *pentru orice* $g, h \in H$

ii) $S(1) = 1$ *respectiv* $S \circ \eta = \eta$

iii) $\varepsilon \circ S = \varepsilon$

iv) $\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S$ *sau, cu alte cuvinte:*

$$\Delta S(h) = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$$

v) Următoarele condiţii sunt echivalente:

$$1)\ h \in H \ \text{ implică } \ \sum_{(h)} S(h_{(2)})h_{(1)} = \eta \circ \varepsilon(h)$$

$$2)\ h \in H \ \text{ implică } \ \sum_{(h)} h_{(2)}S(h_{(1)}) = \eta \circ \varepsilon(h)$$

$$3)\ S \circ S = 1$$

vi) Dacă H este comutativ sau cocomutativ atunci $S^2 = 1$. □

(pentru demonstraţie trimitem tot la [Abe80]).

Remarcă (i) şi (ii) implică S este un anti-morfism de k-algebre; (iii) şi (iv) implică S este un anti-morfism de k-coalgebre.

În paragraful următor vom discuta despre algebra înfăşurătoare universală a unei algebre Lie, după care, in paragraful 1.3, vom prezenta exemple de bialgebre şi algebre Hopf.

1.2 Algebra Înfăşărătoare Universală a unei Algebre Lie

Fie A un inel comutativ. Numim o *A-algebră Lie* un A-modul L pentru care există o funcţie $\varphi : L \times L \to L$ satisfăcând condiţiile următoare (notăm cu $[x,y] = \varphi(x,y)$):

1) (biliniaritate) $[x+y,z] = [x,z]+[y,z]$; $[x,y+z] = [x,y]+[x,z]$; $[ax,y] = a[x,y] = [x,ay]$ pentru orice $x,y,z \in L$ şi $a \in A$

2) (antisimetrie) $[x,x] = 0$

3) (identitate Jacobi) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y] = 0$

De la φ obţinem o funcţie $\varphi_L : L \otimes L \to L$ care este un morfism de A-module. El este numit *funcţia de structură* a A-algebrei Lie L. Pentru o A-algebră B notăm B_L A-algebra Lie obţinută cu produsul (croşetul): $[x,y] = xy - yx$.

Să notăm cu $T(L)$ A-algebra tensorială peste A-modulul L. Avem deci:

$$T(L) = \bigcup_{n\geq 0} NT_n(L) = \bigoplus_{n\geq 0} T_n(L)$$

unde $\{NT_n\}_{n\geq 0}$ formează o filtrare a lui $T(L)$, fiecare $NT_n(L)$ fiind A-modulul tensorilor de rang cel mult n, iar $\{T_n\}_{n\geq 0}$ formează o graduare a lui $T(L)$, fiecare $T_n(L)$ fiind A-modulul tensorilor de rang exact n. Fie J idealul lui $T(L)$ generat de elemente de forma $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ pentru orice $x,y \in L$. Algebra $U(L) = T(L)/J$ se numeşte *A-algebra înfăşurătoare universală a lui L*. Restricţia proiecţiei canonice $T(L) \to U(L)$ la L, $i : L \to U(L)$ se numeşte *scufundare canonică*. Prin definiţie avem

$$i([x,y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$$

Atunci i este un morfism de A-algebre Lie şi anume de la L la $(U(L))_L$. Intersecţia $J_n = J \cap NT_n(L)$, $n \in \mathbf{N}$ este un A-submodul al lui $NT_n(L)$ şi avem $J = \bigcup_{n\geq 0} J_n$. Punem $U_n = NT_n(L)/J_n$. Putem identifica $U_n(L)$ cu un A-submodul al lui $U(L)$ şi atunci $U(L) = \bigcup_{n\geq 0} U_n(L)$ reprezintă o filtrare a algebrei înfăşurătoare universale. Pentru înţelegerea mai bună a acestei structuri să considerăm cazul $A = \mathbf{C}$ (corpul numerelor complexe) şi să ne limităm la algebre Lie L care sunt $\mathbf{C}$-spaţii vectoriale finit dimensionale. Dacă $\{e_1,\ldots,e_n\} \overset{b}{\subset} L$ este o bază în L atunci algebra înfăşurătoare $U(L)$ este izomorfă cu

$\mathbf{C}$-algebra polinoamelor (sau seriilor formale) necomutative în variabilele $x_1, \ldots, x_n$ între care există relaţiile de comutare:

$$x_i x_j = x_j x_i + \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

unde (c_{ij}^k) reprezintă constantele de structură ale algebrei Lie L (i.e. $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$). Această semnificaţie a $\mathbf{C}$-algebrei înfăşurătoare universale a unei $\mathbf{C}$-algebre Lie va fi utilizată în mod consecvent în teoria grupurilor cuantice. În paragraful următor vom vedea cum algebra înfăşurătoare se structurează în mod natural ca o algebră Hopf. Acum am dori să discutăm atât semnificaţia algebrică cât şi cea geometrică a lui $U(L)$ şi totodată conexiunea cu grupul Lie care se ascunde în spatele respectivei algebre Lie. Principalul rezultat în acest sens este teorema Poincaré-Birkhoff-Witt care necesită unele pregătiri. Pentru demonstraţie şi alte comentarii trimitem cititorul la [Abe80] pentru versiunea algebrică şi [Vara74] sau [Nico88] pentru versiunea geometrică.

Veriunea algebrică

Să reamintim mai întâi construcţia algebrei simetrice. Fie S_n grupul permutărilor de n elemente şi a_n A-submodulul lui $T_n(L)$ generat de elemente de forma:

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

cu $x_i \in L$ şi $\sigma \in S_n$. Observăm că $a \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{n \geq 0} a_n$ este un ideal în $T(L)$. Prin definiţie $S(L) = T(L)/a$ se numeşte *A-algebra simetrică* peste L. Punem $S_n = T_n(L)/a_n$, $n \geq 1$ şi $S_0(L) = A$. Atunci $S(L) = \oplus_{n \geq 0} S_n(L)$ devine o A-algebră graduată iar $\{S_n(L)\}_{n \geq 0}$ defineşte o graduare peste $S(L)$.

Cu aceste pregătiri putem enunţa teorema PBW:

TEOREMA 1.5 (Poincaré-Birkhoff-Witt : versiunea algebrică) *Fie L o A-algebră Lie liberă ca A-modul (adică admite bază) şi $U(L)$ algebra sa înfăşurătoare privită ca o A-algebră filtrată. Fie $gr\, U(L)$ A-algebra graduată asociată lui $U(L)$. Atunci ea este izomorfă (ca graduare) cu algebra simetrică a lui L:*

$$gr\, U(L) \simeq S(L)$$

şi, mai mult, scufundarea canonică $i : U \to U(L)$ este injectivă. $\square$

Versiunea geometrică

Pentru uşurinţa înţelegerii vom considera $A = \mathbf{R}$ adică algebra noastră Lie este reală. În plus vom presupune că este de dimensiune finită ca spaţiu vectorial. Fie G un grup Lie a cărui algebră Lie sa fie izomorfă cu L (algebra Lie reală dată). Algebra Lie asociată unui grup Lie este formată din câmpurile vectoriale pe G stâng invariante la acţiunea multiplicativă a grupului. Fie D un operator diferenţial pe G şi $T_a : G \to G$, $T_a(x) = ax$, $a \in G$ translaţia la stânga. Atunci D se zice că este *stâng invariant* dacă $D(f \circ T_a) = Df \circ T_a$, pentru orice $f : G \to \mathbf{R}$ funcţie analitică şi $a \in G$. Notăm cu $OD(G)$ algebra reală a operatorilor diferenţiali pe G şi cu $SD(G)$ mulţimea operatorilor diferenţiali stâng invarianţi. Atunci $SD(G)$ are o structură de $\mathbf{R}$-subalgebră în $OD(G)$. Cu aceste pregătiri putem enunţa teorema PBW în veriune geometrică:

TEOREMA 1.6 (Poincaré-Birkhoff-Witt : versiunea geometrică) *Fie L o algebră Lie reală finit dimensională. Atunci algebra înfăşurătoare universală a lui L este izomorfă cu algebra operatorilor diferenţiali stâng invarianţi ai grupului Lie G asociat lui L:*

$$U(L) \simeq SD(G) \qquad \text{unde} \quad \underline{g} \simeq L$$

□

1.3 Exemple de Algebre Hopf

Vom analiza două tipuri de exemple de algebre Hopf: algebra înfăşurătoare universală a unei algebre Lie şi inelul de coordonate ca algebră grupală a unor grupuri Lie algebrice.

Să începem cu algebra înfăşurătoare universală a unei algebre Lie. Fie L o k-algebră Lie ($k = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$) şi fie $U(L)$ k-algebra înfăşurătoare universală a sa. Considerăm funcţia diagonală:

$$L \to L \otimes L \ \ , \ x \mapsto x \oplus x$$

Deoarece $U(L \oplus L) = U(L) \otimes U(L)$ atunci putem prelungi funcţia diagonală până la un morfism de k-algebre între algebrele înfăşurătoare $U(L)$ şi $U(L \oplus L) = U(L) \otimes U(L)$. Obţinem astfel un morfism de k-algebre:

$$\Delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L) \ \ , \ \ \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \ , \text{pentru } x \in L$$

Considerăm acum morfismul trivial de k algebre Lie:

$$L \to \{0\} \quad , \quad x \mapsto 0$$

Acesta induce un morfism de k-algebre:

$$\varepsilon : U(L) \to k \quad , \quad \varepsilon(x) = 0 \;\text{ pentru } x \in L$$

În situaţia aceasta $(U(L), \Delta, \varepsilon)$ este o k-coalgebră şi $U(L)$ are o structură de k-bialgebră. O vom numi *k-bialgebra înfăşurătoare universală* a k-algebrei Lie L. Se poate vedea că singurele elemente de tip Lie ale lui $U(L)$ sunt cele din L (sau mai riguros $i(L)$). Astfel $P(L) = L$ şi formează evident o k-algebră Lie.

Vom introduce acum structura de algebră Hopf. Aceasta se face prin definirea antipodului. Considerăm automorfismul de algebre Lie:

$$L \to L \quad , \quad x \mapsto -x$$

Acesta induce un anti-automorfism de k-algebre:

$$S : U(L) \to U(L) \quad , \quad S(x) = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

unde $x = x_1 \dots x_n \in U(L)$ cu $x_1, \dots, x_n \in L$. Astfel $U(L)$ devine o k-algebră Hopf numită *k-algebra Hopf înfăşurătoare universală* a k-algebrei Lie L.

Vom exemplifica construcţia generală pe cazurile $L = sl(2, \mathbf{C})$ şi $L = su(2)$.

EXEMPLUL 1.7 *Considerăm următorii generatori ai algebrei Lie $sl(2, \mathbf{C})$:*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

între care există următoarele relaţii de comutare:

$$[E_1, E_2] = 2E_2 \quad [E_1, E_3] = -2E_3 \quad [E_2, E_3] = E_1$$

Atunci algebra înfăşurătoare $U(sl(2, \mathbf{C}))$ poate fi identificată cu $\mathbf{C}$-algebra polinoamelor în variabilele X_1, X_2, X_3, notată $\mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 >$, între care există relaţiile de comutare:

$$X_1X_2 - X_2X_1 = 2X_2 \quad X_1X_3 - X_3X_1 = -2X_3 \quad X_2X_3 - X_3X_2 = X_1$$

Astfel, elemente în $\mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 > \simeq U(sl(2,\mathbf{C}))$ *sunt de forma:*

$$1 \ , \ X_1 \ , \ X_1^2X_2 \ , \ X_1^2X_2X_3 - X_3 + 2$$

Structura de $\mathbf{C}$*-algebră este evidentă (este structura polinoamelor). Structura de coalgebră este introdusă prin morfismul de* $\mathbf{C} - algebre$

$$\Delta : \mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 > \to \mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 > \otimes \, \mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 >$$

definit ca: $\Delta(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$ *şi prelungit prin liniaritate. Astfel:*

$$\Delta(X_1^2X_2 - 1) = (1 \otimes X_1 + X_1 + \otimes)(1 \otimes X_1 + X_1 \otimes 1)(1 \otimes X_2 + X_2 \otimes 1) - 1 \otimes 1 =$$

$$= 1 \otimes X_1^2X_2 + 2X_1 \otimes X_1X_2 + X_1^2 \otimes X_2 + X_2 \otimes X_1^2 + 2X_1X_2 \otimes X_1 + X_1^2X_2 \otimes 1 - 1$$

Counitatea se introduce prin $\varepsilon(X_i) = 0$ *cu* $\varepsilon(1) = 1$*. Astfel:*

$$\varepsilon(2X_1^2X_2 + 3X_3 - 2) = -2$$

Verificarea legilor de coasociativitate şi counitaritate este un exerciţiu simplu. Structura de algebră Hopf se face prin antipodul $S : \mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 > \to \mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 >$ *definit ca* $S(X_i) = -X_i$ *şi extins apoi ca antimorfism de algebre. Astfel:*

$$S(2X_1^2X_2 + 3X_3 + X_2^2 - 2) = -2X_1^2X_2 - 3X_3 + X_2^2 - 2$$

Se observă că S *este un anti-izomorfism al* $\mathbf{C}$*-algebrei* $\mathbf{C}_{sl(2,\mathbf{C})} < X_1, X_2, X_3 >$*(se mai numeşte şi antiautomorfismul principal al algebrei respective).*

EXEMPLUL 1.8 *Să analizăm acum algebra înfăşurătoare a lui* $L = su(2)$*. Considerăm mai întâi generatorii algebrei Lie reale* $su(2)$*:*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

cu relaţiile de comutare:

$$[E_1, E_2] = -2E_3 \quad [E_2, E_3] = -2E_1 \quad [E_3, E_1] = -2E_2$$

Atunci algebra înfăşurătoare $U(sl(2))$ este identificabilă cu $\mathbf{C}$*-algebra liber generată de variabilele T_1, T_2, T_3 între care există relaţiile de comutare: $[T_i, T_j] = -2\varepsilon_{ijk}T_k$. Atunci:*

$$U(su(2)) \simeq \mathbf{C} < T_1, T_2, T_3 > / < T_1T_2 - T_2T_1 + 2T_3, T_2T_3 - T_3T_2 + 2T_1, T_3T_1 - T_1T_3 + 2T_2 > \tag{1.1}$$

Din motive fizice vom prefera să utilizăm, însă, alţi generatori ai algebrei şi anume:

$$J_+ = \frac{1}{2}(E_2 - iE_1) \quad J_- = -\frac{1}{2}(E_2 + iE_1) \quad J_3 = \frac{i}{2}E_3$$

adică:

$$J_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

cu relaţiile de comutare:

$$[J_+, J_-] = 2J_3 \qquad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

(adică relaţiile de comutare ale momentului cinetic). Cu aceşti generatori, algebra înfăşurătoare este izomorfă cu $\mathbf{C}$*-algebra:*

$$\begin{aligned} U(su(2)) \simeq \mathbf{C} < X_+, X_-, X_3 > / < X_+X_- - X_-X_+ - 2X_3, X_3X_+ - X_+X_3 - X_+, \\ X_3X_- - X_-X_3 + X_- > \end{aligned} \tag{1.2}$$

În general vom identifica, pentru o algebră Lie de dimensiune n cu baza $\{E_1, \ldots, E_n\}$, algebra înfăşurătoare universală $U(L)$ cu algebra liberă (a polinoamelor necomutative) în variabilele $X_1, \ldots, X_n \qquad k_L < X_1, \ldots, X_n >$ între care există relaţiile de comutare: $X_iX_j = X_jX_i + \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k$. Observăm că această identificare este dependentă de alegerea bazei; astfel izomorfismul nu este canonic.

Prezentăm acum, ca al doilea exemplu, inelul de coordonate al $\mathbf{C}$-algebrei $M_n(\mathbf{C})$ (algebra matricilor pătrate de dimensiune n) ca o $\mathbf{C}$-bialgebră. Inelul de coordonate (sau algebra grupală) a unei mulţimi M reprezintă mulţimea funcţiilor regulate definite pe M cu valori într-un inel sau algebră (în cazul nostru va fi $\mathbf{C}$). Această mulţime este dotată în mod natural cu o structură de inel sau algebră datorită structurii algebrice respective a codomeniului funcţiilor. Abordarea lui Drinfel'd asupra grupurilor cuantice (vezi [Drin83],[Drin85],[Drin88] sau [Drin86]) porneşte cu studiul inelului de coordonate al unui grup Lie analitic, construit cu funcţii analitice. Noi vom adopta punctul de vedere din [Smit92] şi vom studia exclusiv grupurile algebrice. Asupra importanţei inelului de coordonate vom reveni în curând când vom studia spectrele inelelor.

Să revenim acum la $M_n(\mathbf{C})$. Pentru varietăţi algebrice, inelul de coordonate este dat de inelul raţionalelor în variabilele funcţii de coordonate comutative pe suprafaţa respectivă. În cazul lui $M_n(\mathbf{C})$ funcţiile de coordonate sunt $\{X_{ij}|1 \leq i,j \leq n\}$. Deoarece $\mathbf{C}$ este un corp, inelul de coordonate admite o structură naturală de algebră, numită *algebra grupală*. Astfel, algebra grupală a lui $M_n(\mathbf{C})$ este:

$$\mathcal{O}(M_n(\mathbf{C})) = \mathbf{C}[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{nn}]$$

adică algebra de polinoame în variabilele (X_{ij}).

Structura de coalgebră (şi deci şi de algebră) complexă este dată prin considerarea aplicaţiei duale înmulţirii matriciale şi respectiv din evaluarea în matricea identitate. Avem multiplicarea în inelul $M_n(\mathbf{C})$: $\mu : M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})$, atunci prin dualizare obţinem morfismul de $\mathbf{C}$-algebre:

$$\Delta : \mu^* : \mathcal{O}(M_n) \to \mathcal{O}(M_n \times M_n) \simeq \mathcal{O}(M_n) \otimes \mathcal{O}(M_n)$$

Din cauza asociativităţii lui μ urmează că $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$, adică coasociativitate. Explicit: $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$ după care se prelungeşte prin liniaritate.

Counitatea se defineşte prin $\varepsilon : \mathcal{O}(M_n) \to \mathbf{C}$, $\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$ după care se prelungeşte prin liniaritate. Deoarece funcţiile $M_n \to M_n \times M_n \to M_n$ date prin $A \mapsto (A, I) \mapsto AI$ şi $A \mapsto (I, A) \mapsto IA$ sunt identităţi, urmează că $(1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes 1) \circ \Delta = 1$ adică counitatea.

Astfel $\mathcal{O}(M_n(\mathbf{C}))$ are o structură de $\mathbf{C}$-bialgebră. Această bialgebră nu are o structură de algebră Hopf. Pentru a avea un antipod va trebui să considerăm inelul de coordonate al lui $GL(n, \mathbf{C})$: $\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C}))$. Mai întâi să-l definim. Deoarece $GL(n, \mathbf{C}) = \{M \in M_n(\mathbf{C}) | det(M) \neq 0\}$ rezultă că $\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C}))$ este o localizare a lui $\mathcal{O}(M_n(\mathbf{C})) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}[X_{ij}]$. Un pic de observaţie arată că *deschisul* $GL(n, \mathbf{C})$ are inelul de coordonate:

$$\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C})) = \mathbf{C}[X_{ij}][D^{-1}] \qquad \text{unde} \;\; D = det(X_{ij})$$

adică inelul de raţionale de un tip special în variabilele (X_{ij}) (vom explica această construcţie în paragraful dedicat spectrelor de inele şi punctelor în geometria algebrică).

Atunci Δ şi ε sunt exact aceleaşi ca pentru $M_n(\mathbf{C})$, adică $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$ şi $\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$. Acum putem defini antipodul prin $S(X_{ij}) = D^{-1}(-1)^{i+j} A_{ji}$ unde A_{ji} este al ij-lea $(n-1) \times (n-1)$ minor din matricea generică (X_{ij}), după care se prelungeşte ca antimorfism la $\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C}))$. Pe scurt $S(X)X = XS(X) = I$, unde $X = (X_{ij})$. Este uşor de verificat acum că $\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C}))$ este o algebră Hopf.

Pentru a face mai clare lucrurile vom considera cazul $n = 2$, deci $GL(2, \mathbf{C})$.

EXEMPLUL 1.9 *Vom scrie:*

$$\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C})) = \mathbf{C}[a, b, c, d][(ad - bc)^{-1}]$$

Astfel, elemente din $\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C}))$ sunt fracţii de forma:

$$1 \ , \ a \ , \ a^2 b + c \ , \ \frac{b}{ad - bc} \ , \ \frac{c}{(ad - bc)^2}$$

dar nu sunt elementele:

$$\frac{1}{a} \ , \ \frac{2}{b+1} \ , \ \frac{1-d}{ad-b}$$

Atunci comultiplicarea duce la:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta(c) &= c \otimes a + d \otimes c \\ \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d \end{aligned} \tag{1.3}$$

şi:

$$\Delta\left(\frac{1}{ad - bc}\right) = \frac{1}{ad - bc} \otimes \frac{1}{ad - bc}$$

Counitatea se defineşte prin:

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \qquad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \tag{1.4}$$

după care se prelungeşte prin liniaritate la $\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C}))$. Astfel:

$$\Delta\left(\frac{a}{ad - bc}\right) = \frac{a}{ad - bc} \otimes \frac{a}{ad - bc} + \frac{b}{ad - bc} \otimes \frac{c}{ad - bc}$$

şi:

$$\varepsilon(\frac{a}{ad-bc}) = 1$$

Antipodul se introduce prin:

$$\begin{aligned} S(a) &= (ad-bc)^{-1} \\ S(b) &= -(ad-bc)^{-1} \\ S(c) &= -(ad-bc)^{-1} \\ S(d) &= (ad-bc)^{-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

şi apoi se prelungeşte ca antimorfism. O simplă verificare algebrică probează că $\mathcal{O}(GL(2,\mathbf{C}))$ devine o $\mathbf{C}$-algebră Hopf (vezi [Smit92]).

1.4 Spectrul unui Inel. Punctul în Geometria Algebrică

Să considerăm un inel comutativ (cu unitate) A. Amintim două definiţii relativ la un ideal.

Un ideal P al lui A se numeşte *prim* dacă $P \neq A$ şi din faptul că produsul a două elemente $a, b \in A$ este în P rezultă că cel puţin unul dintre aceste elemente este în P.

Un ideal P al lui A se numeşte *ideal maximal* dacă $P \neq A$ şi oricare ar fi idealul I al lui A cu $P \subset I \subset A$ rezultă $I = A$ sau $I = P$.

Mulţimea idealelor prime ale inelului A se numeşte *spectrul* acestui inel şi se notează cu $Spec\,A$. Idealele prime se numesc *punctele spectrului*. Mulţimea idealelor prime maximale ale inelului A formează *spectrul maximal* şi se notează cu $Spec\,A$. Elementele spectrului maximal sunt în coresponsenţă directă cu punctele geometrice efective.

Să considerăm morfismul de inele $\varphi : A \to B$. Atunci la nivel de spectre obţinem o aplicaţie inversată ${}^a\varphi : Spec\,B \to Spec\,A$ numită *asociata lui* φ. Subliniem că aplicaţia nu are loc şi între spectrele maximale (adică preimaginea unui spectru maximal nu este totdeauna maximală).

Existenţa lui ${}^a\varphi$ se vede uşor astfel: Fie $P \subset B$ un ideal prim. Notăm $Q = \varphi^{-1}(P) \subset A$. El este ideal căci pentru orice $x \in Q$, $a \in A$ avem $ax \in \varphi^{-1}(\varphi(ax)) = \varphi(\varphi(a)\varphi(b)) \subset \varphi^{-1}(\varphi(a)P) \subset \varphi^{-1}(P) = Q$. Apoi Q este prim prin reducere la absurd: dacă există $x, y \in A$ cu $x, y \in Q$ şi

$xy \notin Q$ atunci $\varphi(x)\varphi(y) \notin P$, dar $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \in \varphi(Q) = P$ şi rezultă că P nu ar fi prim. $\square$

Invariantul fundamental al punctului x al varietăţii X este inelul local $\mathcal{O}_x$ al acestui punct. Acest inel este format din toate funcţiile regulate într-o vecinătate oarecare a punctului x. Această definiţie trebuie dată cu grijă deoarece diferite funcţii sunt regulate în vecinătăţi diferite.

Vom nota cu $k[X]$ inelul de polinoame in variabilele varietăţii afine şi cu coeficienţi în corpul k. Acest inel se numeşte *inelul de coordonate al lui* X. Notăm cu $k(X)$ corpul de fracţii al inelului de coordonate $k[X]$. Dacă varietatea X este ireductibilă atunci $\mathcal{O}_x$ este subinelul corpului $k(X)$ format din toate funcţiile $f \in k(X)$ regulate în punctul x. Deoarece $k(X)$ este corpul de fracţii al inelului de coordonate $k[X]$, deducem că inelul $\mathcal{O}_x$ este format din fracţiile f/g cu $f, g \in k[X]$ $g(x) \neq 0$.

Aplicaţia pe care o avem în vedere a spectrelor de inele va fi în a considera inelul de coordinate şi de a extrage grupul prin intermediul spectrului maximal al inelului de coordonate. După ce vom deforma inelul de coordonate (algebra grupală), grupul s-ar putea extrage acum tot din spectrul maximal, iar obiectul astfel obţinut va reprezenta exact "grupul cuantic".

Vom prezenta acum drept exemplu inelul de coordonate al lui $M_2(\mathbf{C})$, după care vom prezenta modalitatea de construire a inelelor de coordonate pentru subvarietăţi deschise şi închise ale unei varietăţi algebrice (afine).

EXEMPLUL 1.10 *Fie $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C})) = \mathbf{C}[a, b, c, d]$ inelul de polinoame în patru variabile a, b, c, d. Vom nota prin $< X, Y >$ idealul generat de elementele X, Y în inelul respectiv. Atunci spectrul lui $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C}))$ este:*

$$Spec\,\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C})) = \{< 0 >, < a - m_{11} >, < b - m_{12} >, < c - m_{21} >, < d - m_{22} >,$$

$$< a - m_{11}, b - m_{12} >, < a - m_{11}, c - m_{21} >, < a - m_{11}, d - m_{22} >, < b - m_{12}, c - m_{21} >,$$

$$< b-m_{12}, d-m_{22} >, < c-m_{21}, d-m_{22} >, < a-m_{11}, b-m_{12}, c-m_{21} >, < a-m_{11}, b-m_{12}, d-m_{22} >,$$

$$< b - m_{12}, c - m_{21}, d - m_{22} >, < a - m_{11}, b - m_{12}, c - m_{21}, d - m_{22} > \ | \ m_{ij} \in \mathbf{C}\}$$

Dintre toate idealele prime doar ultimul este ideal maximal. Deci:

$$Specm\,\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C})) = \{< a - m_{11}, b - m_{12}, c - m_{21}, d - m_{22} > \ | \ m_{ij} \in \mathbf{C}\}$$

Observăm că fiecare ideal prim maximal corespunde unei matrici în $M_2(\mathbf{C})$:

$$< a - m_{11}, b - m_{12}, c - m_{21}, d - m_{22} > \Leftrightarrow \; M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$$

Trecem acum la cazul subvarietăţilor algebrice închise într-un spaţiu afin n-dimensional ($M_2(\mathbf{C})$) este un spaţiu afin 4-dimensional). Considerăm că subvarietatea N este definită de zerourile polinoamelor $F_1 = 0, \ldots, F_p = 0$. Notăm cu I idealul prim generat de $F_1, \ldots, F_p$:

$$I =< F_1, \ldots, F_p > \subset \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$$

Atunci inelul de coordonate al subvarietăţii N este dat de inelul factor:

$$\mathcal{O}(N) = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]/I \tag{1.6}$$

ceea ce înseamnă, echivalent, cu a pune restricţii asupra variabilelor $X_1, \ldots, X_n$.

EXEMPLUL 1.11 *Un exemplu simplu: Considerăm A^2 un spaţiu afin bidimensional şi $N \subset A^2$ dată de ecuaţia: $X_1X_2 = 1$. Atunci $\mathcal{O}(N) = \mathbf{C}[X_1, X_2]/ < X_1X_2 - 1 > \simeq \mathbf{C}[X_1, X_1^{-1}]$, adică este format din toate funcţiile raţionale de X_1 de forma $\frac{G(X_1)}{X_1^n}$ unde $n \geq 0$ şi $G(X_1)$ este polinom.*

Un alt exemplu îl constituie $SL(2, \mathbf{C})$ şi inelul să de coordonate:

EXEMPLUL 1.12 *Avem că $SL(2, \mathbf{C}) \subset M_2(\mathbf{C})$ şi este dat de $ad - bc - 1 = 0$. Atunci:*

$$\mathcal{O}(SL(2, \mathbf{C})) = \mathbf{C}[a, b, c, d]/ < ad - bc - 1 > \tag{1.7}$$

Este interesant de văzut că $\mathcal{O}(SL(2, \mathbf{C}))$ este o $\mathbf{C}$-algebră Hopf cu Δ, ε şi S introduse prin (1.3), (1.4) şi (1.5). Esenţiale, în verificarea structurii de algebră Hopf, sunt relaţiile următoare:

$$\Delta(ad - bc) = (ad - bc) \otimes (ad - bc)$$

$$\varepsilon(ad - bc - 1) = 0$$

a căror verificare este trivială.

Să analizăm acum mulţimile deschise în spaţii afine. Acestea sunt complementare de mulţimi închise. Am văzut că o mulţime închisă este caracterizată printr-un ideal prim în $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_n]$. Să notăm cu $A=\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_n]$ inelul de coordonate al spaţiului afin.

Reamintim următoarea definiţie: O mulţime $S\subset A$ care nu conţine pe 0 şi este inchisă în raport cu operaţia de înmulţire, se numeşte *sistem multiplicativ*. Pentru orice sistem multiplicativ se poate construi inelul de fracţii A_S format din perechile (a,s), $a\in A$, $s\in S$ care se identifică după regula:

$$(a,s)=(a',s') \;\Leftrightarrow\; \exists s''\in S \;a.i.\; s''(as'-a's)=0$$

Operaţiile de inel de definesc în mod natural:

$$(a,s)+(a',s')=(as'+a's,ss')$$

$$(a,s)\cdot(a',s')=(aa',ss')$$

În cele ce urmează clasa perechii (a,s) va fi notată cu a/s. Amintim următoarea proprietate a idealelor prime: Dacă I este un ideal prim în A atunci $A-I$ este un sistem multiplicativ.

Să revenim la mulţimea daschisă $U\subset\mathbf{C}^n$. Fie $P_1,\ldots,P_m$ polinoamele generatoare ale mulţimii închise $\mathbf{C}^n-U$. Fie $S=\{P_1^{s_1}\cdots P_m^{s_m}\}$ sistemul multiplicativ ca mai sus. Atunci inelul de coordonate al lui U este:

$$\mathcal{O}(U)=A_S$$

adică inelul de funcţii cu numărătorii în S. Coresponsenţa $a\mapsto(a,1)$ determină un morfism $\varphi:A\to A_S$ şi deci o aplicaţie asociată:

$${}^a\varphi : Spec\,A_s :\to Spec\,A$$

care corespunde incluziunii mulţimii deschise U în $\mathbf{C}^n$. Se poate verifica, că aplicaţia ${}^a\varphi$ este injectivă şi că ${}^a\varphi(Spec\,A_S)=B_S$ este mulţimea idealelor prime ale lui A care nu conţin nici un element din S. Aplicaţia inversă $\Psi:B_s\to Spec\,A_S$ este dată de formula $\Psi(J)=\{x/s|x\in J,s\in S\}$. În particular dacă $f\in A$ nu este un element nilpotent, sistemul $S=\{f^n,n=1,2,\ldots\}$ nu-l conţine pe 0. În acest caz inelul A_S se notează cu A_f.

EXEMPLUL 1.13 *În cazul lui $U = GL(n, \mathbf{C})$ fie $A = \mathbf{C}[X_{11}, \ldots, X_{nn}]$. Atunci $M_n(\mathbf{C})-U$ este mulţimea închisă determinată de condiţia $D = \det M = 0$, pentru $M = (X_{ij})$. Atunci sistemul multiplicativ este $S = \{D^n, n \geq 0\}$ iar inelul de coordonate al lui U:*

$$\mathcal{O}(GL(n, \mathbf{C})) = A_S \overset{\text{not}}{=} A_D = \{\frac{P}{D^n}\ ,\ P \in A \text{ şi } n \geq 0\}$$

este inelul de fracţii de forma P/D^n. Acest inel se mai notează şi sub forma: $\mathcal{O}(U) = A[D^{-1}]$. Morfismul $A \to A[D^{-1}]$ definit prin $a \mapsto a/1$ conduce la aplicaţia:

$$^a\varphi : Spec\, \mathcal{O}(U) \to Spec\, A$$

injectivă care reprezintă scufundarea deschisului $GL(n, \mathbf{C})$ în $M_n(\mathbf{C})$.

1.5 Dualitatea Inel de Coordonate - Algebră Înfăşurătoare Universală

Considerăm un grup Lie complex G şi $\mathbf{C}$-algebra Lie asociată $\underline{g}$. Grupului Lie îi asociem inelul de coordonate care se structurează ca o $\mathbf{C}$-algebră Hopf $\mathcal{O}(G)$. De la algebra Lie obţinem algebra înfăşurătoare universală $U(\underline{g})$ care de asemenea este o $\mathbf{C}$-algebră Hopf. Se naşte firesc întrebarea ce legătură există între $\mathcal{O}(G)$ şi $U(\underline{g})$? Răspunsul este dat de analiza atentă a acestor structuri algebrice ţinând cont de teorema PBW (varianta geometrică) - teorema 1.6. Mai întâi câteva notaţii de dualitate. Considerăm A o $\mathbf{C}$-algebră Hopf. Atunci:

$$A^* = Hom_{\mathbf{C}}(A, \mathbf{C})$$

$$A^\circ = \{f \in Hom_{\mathbf{C}}(A, \mathbf{C}) \mid Ker\, f \text{ conţine un ideal de codimensiune finită}\}$$

$$A' = \{f \in Hom_{\mathbf{C}}(A, \mathbf{C}) \mid Ker\, f \text{ conţine } m^n \text{ pentru un } n, \text{ unde } m = Ker\, \varepsilon\}$$

Elementelor din algebra înfăşurătoare le asociem operatori diferenţiali stâng invarianţi. Aceştia (operatorii diferenţiali) se pot aplica exact pe funcţiile regulate din inelul de coordonate al grupului. Astfel se poate bănui că ar trebui să existe o relaţie de dualitate între $U(\underline{g})$ şi $\mathcal{O}(G)$. Răspunsul este afirmativ în următoarele condiţii: grupul G să fie conex şi simplu conex, iar algebra Lie $\underline{g}$ să fie semisimplă. Atunci se arată că:

$$\mathcal{O}(G)' \simeq U(\underline{g}) \text{ respectiv } U(\underline{g})^\circ \simeq \mathcal{O}(G)$$

Capitolul 2

Grupuri Cuantice

Înainte de a porni la drum să încercăm un sumar al faptelor.

Spaţiul afin în care construim totul este $M_n(\mathbf{C})$. Acesta este de dimensiune n^2 iar inelul său de coordonate este $\mathcal{O}(M_n(\mathbf{C})) = \mathbf{C}[X_{ij}]$. Considerăm grupurile algebrice de matrici G care sunt scufundate în $M_n(\mathbf{C})$. Acestea sunt deschişi sau închişi în spaţiul afin şi admit un inel de coordonate $\mathcal{O}(G)$ care este dotat, totodată , cu o structură de $\mathbf{C}$-algebră Hopf. Algebrei Lie $\underline{g}$ asociate grupului G putem să-i determinăm algebra sa universală înfăşurătoare $U(\underline{g})$. Aceasta este identificabilă cu o $\mathbf{C}$-algebră polinomială necomutativă între variabilele căreia există anumite relaţii de comutare. Aceasta este de asemeni o $\mathbf{C}$-algebră Hopf dar, spre deosebire de inelul de coordonate, o algebră de polinoame necomutative. În plus, sub anumite condiţii (G să fie conex şi simplu conex şi $\underline{g}$ să fie semisimplă) între cele două structuri avem o relaţie de dualitate faţă de topologia m-adică (vezi paragraful 1.5).

În utilizarea grupurilor, noţiunea de acţiune (sau reprezentare) are o importanţă fundamentală.

Să considerăm acţinea unui grup Lie G ($\subset M_n(\mathbf{C})$) în spaţiul $\mathbf{C}^n$, definită prin:

$$f : G \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n \qquad , \quad f(A, x) = Ax$$

Atunci această funcţie poate fi "ridicată" până la inelele de coordonate ale celor două spaţii (în cazul lui $\mathbf{C}^n$ $\mathcal{O}(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$) şi anume până la un morfism de algebre astfel:

$$\lambda : \mathcal{O}(\mathbf{C}^n) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$$

$\lambda(T_i) = \sum_k X_{ik} \otimes T_k$. Astfel $\mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ are o structură de $\mathcal{O}(G)$-comodul la stânga.

Să consideră acum acţiunea algebrei Lie $\underline{g}$ în spaţiul $\mathbf{C}^n$ definită asemănător:

$$h : \underline{g} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n \quad , \quad h(A, x) = Ax$$

Atunci această funcţie poate fi prelungită până la un morfism de algebre între algebra înfăşurătoare a lui $\underline{g}$ şi inelul de coordonate al lui $\mathbf{C}^n$, mai precis:

$$\mu : U(\underline{g}) \otimes \mathcal{O}(\mathbf{C}^n) \to \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$$

prin: dacă $u = i(A_1) \ldots i(A_p) \in U(\underline{g})$ cu $A_i \in \underline{g}$ atunci $\mu(u, x) = A_1 \cdots A_p x$. Acest morfism face $\mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ să fie un $U(\underline{g})$-modul la stânga.

Astfel, teoria acţiunii (şi reprezentărilor) se reduce la găsirea tuturor $\mathcal{O}(G)$-comodulelor la stânga sau $U(\underline{g})$-modulelor la stânga. Observăm că prin această liftare practic dispar grupul şi algebra Lie asociată. În locul lor apar ca mult mai importante cele două structuri duale: inelul de coordonate şi algebra înfăşurătoare, obiecte care posedă şi o structură de $\mathbf{C}$-algebră Hopf, induse de structurile de grup sau, respectiv, algebră originale.

În cele ce urmează vom încerca să "deformăm" structura de $\mathbf{C}$-algebră Hopf a algebrei înfăşurătoare $U(\underline{g})$ încercând, acolo unde s-a rezolvat, să găsim şi deformarea similară a $\mathbf{C}$-algebrei Hopf $\mathcal{O}(G)$ care să păstreze cât mai mult din dualitate. Dacă s-ar dori determinarea unui grup din structurile deformate, ar trebui să se calculeze spectrul inelului $\mathcal{O}(G)$ deformat (pe care îl notăm $\mathcal{O}_q(G)$), iar apoi să se recupereze structura algebrică pe aceste puncte. Atunci putem considera că există o corespondenţă directă între grupuri cuantice şi algebre înfăşurătoare deformate $U_q(\underline{g})$. Caracteristica definitorie a lui $U_q(\underline{g})$ este faptul că rămâne o $\mathbf{C}$-algebră Hopf. Acest lucru îl face pe Drinfel'd să spună că la nivel categoricial există un functor între categoria algebrelor Hopf şi cea a grupurilor cuantice. (vezi [Drin86]).

În cele ce urmează ne vom ocupa de deformările algebrelor Hopf în cazul $n = 2$.

2.1 Matricea R şi Ecuaţia Yang-Baxter

Considerăm cazul $n = 2$. Căutăm o matrice $R \in M_4(\mathbf{C}) = M_2(\mathbf{C}) \otimes M_2(\mathbf{C}) = End_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2)$ care să respecte o anumită egalitate pe care o introducem mai jos. Dacă $R = \sum_i a_i \otimes b_i$

atunci definim $R_{12}, R_{13}, R_{23} \in M_8(\mathbf{C}) = End_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2)$ prin:

$$R_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1 \quad , \quad R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i \quad , \quad R_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$$

Ecuaţia cuantică Yang-Baxter (QYBE) se scrie atunci sub forma:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{2.1}$$

Dacă soluţia R depinde de un parametru h, dezvoltăm în jurul lui 0 (unde $R(0) = I$) şi obţinem: $R(h) = I + rh + r_2h^2 + \ldots$. Pentru $r \in M_n(\mathbf{C})$ construim r_{12}, r_{13}, r_{23} analog construcţiei lui R_{12}, R_{13}, R_{23} iar aceste matrici vor satisface *ecuaţia clasică Yang-Baxter*(CYBE):

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \tag{2.2}$$

Vom verifica că o anumită matrice este soluţie a lui (2.1) (QYBE), iar "liniarizarea" sa este soluţie a lui (2.2) (CYBE):

$$R = \begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{unde } p = q^2 - q^{-2} \; , q \in \mathbf{C} \tag{2.3}$$

Descompunerea lui R este de forma:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bigotimes \begin{bmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bigotimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bigotimes \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atunci se obţine:

$$R_{12} = R \otimes I_2 = \begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \end{bmatrix}$$

$$R_{13} = \begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \end{bmatrix}$$

$$R_{23} = I_2 \otimes R = \begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 \end{bmatrix}$$

iar QYBE se verifică prin înmulţirea acestor matrici 8×8.

Liniarizarea matricii R se poate obţine dacă punem $q = e^{h/2}$. Atunci $q^2 = 1 + h + \ldots$, iar $p = e^h - e^{-h} = 1 + h^2 + \ldots$. Deci:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iar celelalte 3 matrici r_{12}, r_{13}, r_{23} se obţin analog lui R_{12}, R_{13}, R_{23} şi apoi se verifică :

$$[r_{12}, r_{13}] = [r_{12}, r_{23}] = [r_{13}, r_{23}] = 0$$

Deci şi CYBE se verifică.

2.2 Deformarea Inelului de Coordonate $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C}))$

Să notăm cu $\mathbf{C} < X_{ij} >$ algebra liberă în nedeterminatele X_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$ şi $X = (X_{ij}) \in M_2(\mathbf{C} < X_{ij} >)$ matricea de coordonate. Să notăm cu $X_1 = X \otimes I$ şi $X_2 = I \otimes X$. Atunci, pentru o matrice $R \in M_4(\mathbf{C})$ definim I_R să fie idealul bilateral în $\mathbf{C} < X_{ij} >$ generat de elementele matricii:

$$RX_1X_2 - X_2X_1R \tag{2.4}$$

Atunci *algebra matricială cuantică asociată lui* R se defineşte prin algebra factor:

$$\mathcal{O}_R(M_2(\mathbf{C})) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C} < X_{ij} > / I_R \tag{2.5}$$

Observăm că pentru $R = I$ obţinem algebra comutativă obişnuită $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C}))$. În cele ce urmează vom considera matricea R soluţie a ecuaţiei Yang-Baxter (CYBE) prezentată anterior (2.3). Vom nota simplu $\mathcal{O}_q(M_2(\mathbf{C})) = \mathcal{O}_R(M_2(\mathbf{C}))$ pentru acest R.

Dacă dezvoltăm (2.4) obţinem:

$$RX_1X_2 - X_2X_1R = \begin{bmatrix} 0 & q^{-2}X_{11}X_{12} - X_{12}X_{11} & q^2X_{12}X_{11} - X_{11}X_{12} & 0 \\ X_{11}X_{21} - q^2X_{21}X_{11} & X_{11}X_{22} - X_{22}X_{12} - pX_{21}X_{12} & X_{12}X_{21} - X_{21}X_{12} & X_{12}X_{22} - q^2X_{22}X_{12} \\ X_{21}X_{11} - q^{-2}X_{11}X_{21} & X_{21}X_{12} - X_{12}X_{21} & X_{22}X_{11} - X_{11}X_{22} + pX_{12}X_{21} & X_{22}X_{12} - q^{-2}X_{12}X_{22} \\ 0 & q^{-2}X_{21}X_{22} - X_{12}X_{21} & q^2X_{22}X_{21} - X_{21}X_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

A considera inelul $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C})) = \mathbf{C} < X_{ij} > / I_R$ înseamnă a considera inelul $\mathbf{C} < a, b, c, d >$ cu urmă toarele relaţii de comutare:

$$\begin{array}{lll} ba = q^{-2}ab & db = q^{-2}bd & bc = cb \\ ca = q^{-2}ac & dc = q^{-2}cd & ad - da = (q^2 - q^{-2})bc \end{array}$$

Întru-cât $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C}))$ astfel definit este un inel generat de extensia Ore iterată:

$$\mathbf{C}[a] \subset \mathbf{C}[a,b] = \bigoplus_j \mathbf{C}[a]b^j \subset \mathbf{C}[a,b,c] = \bigoplus_k \mathbf{C}[a,b]c^k \subset \mathbf{C}[a,b,c,d] = \bigoplus_l \mathbf{C}[a,b,c]d^l$$

rezultă că o bază poate fi luată $\{a^ib^jc^kd^l | i,j,k,l \in \mathbf{N}\}$ (ca spaţiu vectorial), iar ca inel rămâne domeniu noetherian[1]. Mai mult, cu aceleaşi legi ca şi $\mathcal{O}(M_2(\mathbf{C}))$ obţinem că $\mathcal{O}_q(M_2(\mathbf{C}))$ este o bialgebră.

2.3 Grupul Cuantic $SL(2, \mathbf{C})$

2.3.1 Algebra Hopf $\mathcal{O}_q(SL(2, \mathbf{C}))$

Construcţia inelului $\mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C}))$ se face analog lui $\mathcal{O}(SL(2,\mathbf{C}))$. Problema ce se ridică se referă la determinantul unei matrici. Dacă nedeformat $det \equiv ad - bc$, vom lua $det_q \equiv$

[1] Adică este domeniu de integritate şi orice ideal este finit generat

$ad - q^2bc$. Atunci:

$$\mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C})) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_q(M_2(\mathbf{C}))/ < ad - q^2bc - 1 >$$

Se poate demonstra că $\mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C}))$ admite o structură de $\mathbf{C}$-algebră Hopf construită din structura de bialgebră ”moştenită” de la $\mathcal{O}_q(M_2(\mathbf{C}))$, iar antipodul se defineşte analog cazului nedeformat:

$$\begin{array}{cc} S(a) = (ad - q^2bc)^{-1}d & S(b) = -(ad - q^2bc)^{-1}b \\ S(c) = -(ad - q^2bc)^{-1}c & S(d) = (ad - q^2bc)^{-1}a \end{array} \tag{2.6}$$

În demonstraţia structurii de bialgebră, pentru ca Δ şi ε să treacă la inelul factor $\mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C}))$ se utilizează relaţiile:

$$\Delta(ad - q^2bc) \subset (ad - q^2bc) \otimes (ad - q^2bc)$$

$$\varepsilon(ad - q^2bc - 1) = 0$$

O motivaţie pentru alegera lui $det_q = ad - q^2bc$ este dată de faptul că centrul lui $\mathcal{O}_q(M_2(\mathbf{C}))$ este generat de $ad - q^2bc$ (atunci când q nu este o rădăcină a unităţii). Întradevăr:

$$a\, det_q = a(ad - q^2bc) = aad - q^2abc = a[da + (q^2 - q^{-2})bc] - q^{-2}abc = ada - q^{-2}abc =$$

$$= ada - bac = ada - q^2bca = (ad - q^2bc)a = det_q\, a$$

Analog pentru ceilalţi generatori.

2.3.2 Algebra înfăşurătoare deformată $U_h(sl(2))$

Cu notaţiile din exemplul 1.7 avem că:

$$U(sl(2)) = \mathbf{C} < X_1, X_2, X_3 > / < X_1X_2 - X_2X_1 - 2X_2, X_1X_3 - X_3X_1 + 2X_3, X_2X_3 - X_3X_2 - X_1 >$$

Deformarea cuantică a lui $U(\underline{g})$ (în construcţia Kulish-Reshetikhin, 1983) porneşte de la deformarea comutatorului $[X_2, X_3]$ şi anume:

$$[X_2, X_3] = \frac{sinh(\frac{1}{2}hX_1)}{sinh(\frac{1}{2}h)} \tag{2.7}$$

unde $h \in \mathbf{C}$ este un număr complex, iar $sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ este sinusul hiperbolic. Se observă că $\lim_{h\to 0} sinh(\frac{1}{2}hX_1)/sinh(\frac{1}{2}h) = X_1$. Structura deformată va fi:

$$U_h(sl(2)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C} < X_1, X_2, X_3 > / < X_1X_2 - X_2X_1 - 2X_2, X_1X_3 - X_3X_1 + 2X_3,$$
$$X_2X_3 - X_3X_2 - sinh(\frac{1}{2}hX_1)/sinh(\frac{1}{2}h) >$$

Limita $\lim_{h\to 0} U_h(sl(2))$ are sens prin considerarea structurii factor $U_h(sl(2))/hU_h(sl(2))$. Se verifică uşor că

$$U_h(sl(2))/hU_h(sl(2)) \simeq U_0(sl(2)) = U(sl(2))$$

Vom demonstra că $U_h(sl(2))$ este dotată o structură de algebră Hopf. Pentru aceasta, însă, vom schimba generatorul X_1 convenabil.

2.3.3 Algebra înfăşurătoare deformată $U_q(sl(2))$

Să considerăm $X_4 = exp(\frac{1}{4}hX_1)$ şi $q = exp(\frac{1}{4}h)$. Atunci relaţia de comutare (2.7) se transformă în:

$$X_2X_3 - X_3X_2 = \frac{X_4^2 - X_4^{-2}}{q^2 - q^{-2}}$$

Să considerăm o serie formală $g(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$. Deoarece $X_1X_2 - X_2X_1 = 2X_2$ rezultă $X_1X_2 = X_2(X_1+2)$. Recurent $X_1^nX_2 = X_2(X_1+2)^n$ deci formal: $g(X_1)X_2 = X_2g(X_1+2)$. Analog $g(X_1)X_3 = X_3g(X_1-2)$. Dacă considerăm $g(x) = exp(\frac{1}{4}hx)$ atunci:

$$X_4X_2 = q^2X_2X_4 \qquad X_4X_3 = q^{-2}X_3X_4$$

Obţinem că $U_h(sl(2))$ este izomorf cu următoarea structură notată $U_q(sl(2))$:

$$U_q(sl(2)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C} < X_2, X_3, X_4, X_4^{-1} >$$

cu relaţiile de comutare:

$$X_4X_2 = q^2X_2X_4 \ , \ X_4X_3 = q^{-2}X_3X_4 \ , \ X_2X_3 - X_3X_2 = \frac{X_4^2 - X_4^{-2}}{q^2 - q^{-2}}$$

Acest din urmă obiect, $U_q(sl(2))$, admite o structură de $\mathbf{C}$-algebră Hopf. Într-adevăr, să considerăm:

$$\Delta(X_2) = X_2 \otimes X_4^{-1} + X_4 \otimes X_2$$

$$\Delta(X_3) = X_3 \otimes X_4^{-1} + X_4 \otimes X_3$$

$$\Delta(X_4) = X_4 \otimes X_4 \qquad \Delta(X_4^{-1}) = X_4^{-1} \otimes X_4^{-1}$$

$$S(X_2) = -q^{-2}X_2 \qquad S(X_3) = -q^2 X_3$$

$$S(X_4) = X_4^{-1} \qquad S(X_4^{-1}) = X_4$$

$$\varepsilon(X_2) = \varepsilon(X_3) = 0 \qquad \varepsilon(X_4) = \varepsilon(X_4^{-1}) = 1$$

iar apoi extindem Δ şi ε ca morfisme de algebră, în timp ce S se extinde ca antimorfism. Verificările de coasociativitate, counitaritate şi element antipod sunt suficient de simple.

În mod clar $U_q(sl(2))$ este o extensie Ore iterată şi prin urmare un domeniu de noetherianitate cu baza $\{X_2^i X_3^j X_4^k | i, j \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}\}$. Centrul lui $U_q(sl(2))$ este generat de un analog al unui element Cazimir:

$$\Omega = X_2X_3 + X_3X_2 + \frac{q^4+1}{q^4-1}\frac{X_4^2 + X_4^{-2}}{q^2 - q^{-2}}$$

Pentru mai multe amănunte vezi [Smit92].

Legătura între $U_q(sl(2))$ definit mai sus şi $\mathcal{O}(SL(2,\mathbf{C}))$ a fost arătată în 1987 de M.Rosso ([Rosso87]) utilizând o reprezentare a lui $U_q(sl(2))$. Se obţine o funcţie injectivă de la $U_q(sl(2)) \mapsto \mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C}))^*$ unde $*$ reprezintă dualul algebric al lui $\mathcal{O}(SL(2,\mathbf{C}))$ ($A^* = Hom_{\mathbf{C}}(A,\mathbf{C})$). În plus, dacă se introduce o anumită topologie co-finită pe $\mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C}))$, morfismul devine un izomorfism până pe $\mathcal{O}_q(SL(2,\mathbf{C}))'$.

Partea II

Aplicaţii în Fizică ale lui $SU_q(2)$

Capitolul 3

Reprezentările Bosonice ale lui $SU_q(2)$

3.1 Deformarea Grupului $SU(2)$

3.1.1 Algebra Hopf $SU_q(2)$

Pentru $SU(2)$ se poate proceda analog grupului $SL(2)$. Problema este că, spre deosebire de $SL(2)$, trebuie ţinut cont de relaţia de unitaritate care presupune utilizarea conjugatelor coordonatelor. Să notăm compact:

$$X = \begin{bmatrix} a & -q^2\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

Atunci cu aceeaşi matrice R ca cea din (2.3) construim un inel de coordonate analog lui (2.5) pe care îl facorizăm printr-un inel conţinând $det_q - 1$ şi $T^+ - T^{-1}$:

$$\mathcal{O}_q(SU(2)) = \mathbf{C} < a, b, \bar{a}, \bar{b} > / < RX_1X_2 - X_2X_1R, det_q - 1, T^+ - T^{-1} >$$

Tot compact putem scrie şi legile de $\mathbf{C}$-algebră Hopf:

$$\Delta(X) = X \otimes X \quad , \quad \varepsilon(X) = I \quad , \quad S(X) = X^{-1}$$

3.1.2 Algebra deformată $U_q(su(2))$

Algebra înfăşurătoare $U_q(su(2))$ se defineşte pornind de la generatorii J_+, J_-, J_3 aşa cum apar în exemplul 1.8. Mai precis, relaţiile de comutare prezentate acolo se deformează astfel:

$$\begin{array}{c}[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \\ [J_+, J_-] = [2J_3]\end{array} \tag{3.1}$$

unde am introdus *paranteza cuantică*:

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \tag{3.2}$$

sau, în termenii lui $\gamma = ln\, q$ obţinem:

$$[x] = \frac{sinh(\gamma x)}{sinh(\gamma)} \tag{3.3}$$

Deci avem că:

$$U_q(su(2)) = \mathbf{C} < J_+, J_-, J_3 > / < J_3 J_\pm - J_\pm J_3 \mp J_\pm, J_+J_- - J_-J_+ - [2J_3] >$$

Proprietăţile parantezei cuantice pot fi restrânse la:

i) $\lim_{q\to 1}[x] = x = \lim_{\gamma\to 0}[x]$

ii) $[-x] = -[x]$

iii) $[1] = 1$, $[0] = 0$

iv) $[\,]$ este invariantă la transformarea numită *de dualitate* $q \leftrightarrow q^{-1}$ sau $\gamma \leftrightarrow -\gamma$.

O primă consecinţă a relaţiilor (i) şi (ii) este că $SU_q(2)$ şi $SU(2)$ au aceeaşi algebră pentru spin 0 ($J_3 = 0$) şi pentru spin $\frac{1}{2}$ ($2J_3 = \pm 1$). În plus are loc relaţia la limită:

$$\lim_{q\to 1} U_q(su(2)) = U(su(2))$$

3.2 Reprezentarea Bosonică a lui $U_q(su(2))$

Jimbo a construit o reprezentare finit dimensională pentru operatorii J_+, J_-, J_3 în care aceştia acţionează într-un spaţiu Hilbert cu baza $|jm>$ după relaţiile:

$$\begin{array}{rcl} J_3|jm> &=& m|jm> \\ J_\pm|jm> &=& ([j\mp m][j\pm m+1])^{\frac{1}{2}}|j, m\pm 1>\end{array} \tag{3.4}$$

unde $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ şi $-j \leq m \leq j$. Atunci:

$$J_-J_+|jm> = [j-m][j+m+1]|jm>$$

$$J_+J_-|jm>=[j+m][j-m+1]|jm>$$

Pentru a obţine reprezentările bosonice considerăm limita $j\to\infty$ în două situaţii şi anume atunci când $j-m=n_1$ finit sau $j+m=n_2$ finit.

a) Considerăm $j-m=n_1$ este finit. Atunci:

$$\frac{J_-}{\sqrt{[2j]}}\frac{J_+}{\sqrt{[2j]}}|jm>=[j-m]\frac{[j+m+1]}{[2j]}|jm>\longrightarrow[n_1]|jm>$$

$$\frac{J_+}{\sqrt{[2j]}}\frac{J_-}{\sqrt{[2j]}}|jm>=\frac{[j+m]}{[2j]}[j-m+1]|jm>\longrightarrow[n_1+1]|jm>$$

Definim operatorii limită:

$$a_1=\lim_{\substack{j\to\infty\\ j-m=n_1}}\frac{J_+}{\sqrt{[2j]}}\qquad a_1^+=\lim_{\substack{j\to\infty\\ j-m=n_1}}\frac{J_-}{\sqrt{[2j]}}$$

Atunci vom rescrie $a_1^+a_1=[N_1]$, $a_1a_1^+=[N_1+1]$ şi:

$$[a_1,a_1^+]=[N_1+1]-[N_1]=\frac{cosh(\gamma/2(2N_1+1))}{cosh(\gamma/2)}$$

Putem construi acum un spaţiu Hilbert cu baza $|n_1>$ dată de:

$$|n_1>=\frac{(a_1^+)^{n_1}}{([n_1]!)^{1/2}}|0>$$

unde:

$$[n_1]!=[n_1][n_1-1]\cdots[2][1]$$

iar acţiunea operatorilor N_1,a_1,a_1^+ este dată de:

$$\begin{aligned}&N_1|n_1>=n_1|n_1>\\&a_1|n_1>=[n_1]^{1/2}|n_1-1>\\&a_1^+|n_1>=[n_1+1]^{1/2}|n_1+1>\end{aligned}$$

b) Considerăm acum $j+m=n_2=0,1,2,\ldots$ şi $j\to\infty$. Repetăm schema anterioară şi obţinem:

$$\frac{J_-}{\sqrt{[2j]}}\frac{J_+}{\sqrt{[2j]}}|jm>=\frac{[j-m+1]}{[2j]}[j+m+1]|jm>\longrightarrow[n_2+1]|jm>$$

$$\frac{J_+}{\sqrt{[2j]}}\frac{J_-}{\sqrt{[2j]}}|jm>=[j+m]\frac{[j-m+1]}{[2j]}|jm>\longrightarrow[n_2]|jm>$$

Definim acum operatorii limită astfel:

$$a_2=\lim_{\substack{j\to\infty\\ j+m=n_2}}\frac{J_-}{\sqrt{[2j]}}\qquad a_2^+=\lim_{\substack{j\to\infty\\ j+m=n_2}}\frac{J_+}{\sqrt{[2j]}}$$

Obţinem astfel: $a_2^+a_2=[N_2]$, $a_2a_2^+=[N_2+1]$ şi:

$$[a_2,a_2^+]=[N_2+1]-[N_2]=\frac{cosh(\gamma/2(2N_2+1))}{cosh(\gamma/2)}$$

Spaţiu Hilbert pe care îl putem să-l construim este format din vectorii $|n_2>$ daţi de:

$$|n_2>=\frac{(a_2^+)^{n_2}}{([n_2]!)^{1/2}}|0>$$

iar acţiunea lor este dată de:

$$\begin{array}{l} N_2|n_2>=n_2|n_2> \\ a_2|n_2>=[n_2]^{1/2}|n_2-1> \\ a_2^+|n_2>=[n_2+1]^{1/2}|n_2+1> \end{array}$$

Am obţinut astfel două tipuri de oscilatori armonici care compun starea. Aceasta (starea generală $|jm>$) este obţinută din:

$$|jm>=\frac{(a_1^+)^{j-m}}{([j-m]!)^{1/2}}\frac{(a_2^+)^{j+m}}{([j+m]!)^{1/2}}|0> \tag{3.5}$$

pe care o notăm şi cu $|jm>=|n_1n_2>$.

Să considerăm acum $J_-=a_1^+a_2$, $J_+=a_2^+a_1$, $2J_3=N_2-N_1$. Ne propunem să verificăm relaţiile de comutare în baza $|n_1n_2>$ definite mai sus. Avem:

$$[J_3,J_+]|n_1n_2>=\frac{1}{2}[N_2-N_1,a_2^+a_1]|n_1n_2>=\frac{1}{2}\{(N_2-N_1)a_2^+a_1|n_1n_2>-a_2^+a_1(N_2-N_1)|n_1n_2>\}=$$

$$=\frac{1}{2}\{(N_2-N_1)a_2^+|n_1-1,n_2>[n_1]^{1/2}-(n_2-n_1)a_2^+a_1|n_1n_2>\}=$$

$$=\frac{1}{2}\{(N_2-N_1)|n_1-1,n_2+1>[n_2+1]^{1/2}[n_1]^{1/2}-(n_2-n_1)[n_1^{1/2}[n_2+1]^{1/2}|n_1-1,n_2+1>\}=$$

$$= \frac{1}{2}\{(n_2 - n_1 + 2)[n_1]^{1/2}[n_2 + 1]^{1/2} - (n_2 - n_1)[n_1]^{1/2}[n_2 + 1]^{1/2}\}|n_1 - 1, n_2 + 1 >=$$

$$= [n_1]^{1/2}[n_2 + 1]^{1/2}|n_1 - 1, n_2 + 1 >$$

Pe de altă parte:

$$J_+|n_1 n_2 >= [n_1]^{1/2}[n_2 + 1]^{1/2}|n_1 - 1, n_2 + 1 >$$

De unde obţinem că $[J_3, J_+] = J_+$. Analog $[J_3, J_-] = -J_-$. Cu o schemă asemănătoare, doar că necesită un efort de calcul algebric mai mare, se verifică şi relaţia $[J_+, J_-] = [2J_3]$.

Din considerarea celor două limite $j \to \infty$ în cazurile $j - m = const$ sau $j + m = const$ deducem ecuaţiile oscilatorului cuantic deformat (numit q-oscilatorul armonic) şi anume:

$$a^+ a = [N] \qquad aa^+ = [N + 1] \tag{3.6}$$

şi:

$$[a, a^+] = \frac{cosh(\gamma/2(2N + 1))}{cosh(\gamma/2)} \tag{3.7}$$

Se observă că în limita $\gamma \to 0$ obţinem: $[a, a^+] = 1$ adică oscilatorul armonic nedeformat.

În ceea ce priveşte elementele Cazimir ale algebrei înfăşurătoare (deformate) putem spune că centrul algebrei deformate $U_q(su(2))$ conţine operatorul:

$$C_2[SU_q(2)] = J_- J_+ + [J_3][J_3 + 1]$$

care, aplicat pe vectorii reprezentării conduce la:

$$C_2[SU_q(2)]|jm >= [j][j + 1]|jm >$$

(vezi şi [Bona91]).

Capitolul 4

Aplicaţii ale Grupurilor Cuantice

4.1 Analiza Spectrului Vibraţional

Aşa cum am văzut în capitolul precedent, putem defini q-operatorii de anihilare şi creare a, a^+ care acţionează în spaţiul Hilbert cu baza $\{|n>\}$ astfel:

$$a|n>=[n]^{1/2}|n-1>$$

$$a^+|n>=[n+1]^{1/2}|n+1>$$

iar operatorul numărului de particule N se defineşte prin:

$$[N]=a^+a \quad , \quad \text{cu} \quad N|n>=n|n>$$

Se pot verifica relaţiile de comutare: $[N,a^+]=a^+$, $[N,a]=-a$. Putem defini acum q-poziţia şi q-impulsul astfel:

$$P=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^+-a)$$

$$Q=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^++a)$$

cu $m,\omega,\hbar$ având semnificaţiile uzuale, iar relaţia de comutare este: $[P,Q]=i\hbar[a^+,a]$. Hamiltonianul sistemului va fi:

$$H=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2=\frac{1}{2}\hbar\omega(aa^++a^+a) \tag{4.1}$$

Vectorii şi valorile proprii ale energiei vor fi:

$$H|n>=E_q(n)|n>$$

cu:

$$E_q(n) = \frac{1}{2}\hbar\omega([n+1]+[n]) \tag{4.2}$$

4.1.1 Analiza în cazul $q = e^{ig}$

Avem paranteza cuantică:

$$[x] = \frac{sin(gx)}{sin(g)}$$

şi atunci:

$$E_q(n) \equiv E_g(n) = \frac{\hbar\omega}{2sin\frac{g}{2}} sin\,(n+\frac{1}{2})g \tag{4.3}$$

Se observă că $\lim_{g\to 0} E_g(n) = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, adică obţinem spectrul oscilatorului armonic nedeformat.

1) Dependenţa $E = E_g(n)$ este prezentată în figurile 1,3 şi 4 de la sfârşitul lucrării. Se observă o concentrare energetică în două puncte $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$ pentru $g = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

2) Din relaţia:

$$E_g(n) = C(g)\sin(n+\frac{1}{2})g$$

deducem că pentru $g \neq 0$ spectrul este mărginit de domeniul $[-C(g), C(g)]$

3) Dacă g nu este în raţionalitate cu π (adică $\frac{g}{\pi} \notin Q$), un rezultat cunoscut din teoria sistemelor ergodice ne asigură că $\{E_g(n)|n \in \mathbf{N}\}$ este densă în $I = [-C(g), C(g)]$. Obţinem deci că spectrul oscilatorului devine o bandă. Multiplicitatea unui nivel energetic este 1.

4) Dacă $g = \frac{\pi}{N}$, atunci obţinem un spectru discret, finit, iar numărul liniilor este par. Într-adevăr, fie două linii cu numerele n_1 şi n_2:

$$E_g(n_1) = C(g)\sin((n_1+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N}) \quad E_g(n_2) = C(g)\sin((n_2+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N})$$

Pentru periodicitate: $(n_2+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N} - (n_1+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N} = 2\pi$, deci $n_2 - n_1 = 2N$, sau $(n_1+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N} + (n_2+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N} = \pi, 3\pi$. Atunci $n_1 + n_2 + 1 = N$ sau $n_1 + n_2 + 1 = 3N$. Numărul de perechi (n_1, n_2) cu $0 \leq n_1, n_2 < 2N$ independente de relaţiile $n_1 + n_2 + 1 = N, 3N$ se deduce a fi:

$$Nr.linii = \begin{cases} N & pentru\ N = 2p\ (par) \\ N+1 & pentru\ N = 2p+1\ (impar) \end{cases}$$

Multiplicitatea unei linii este ∞.

4.1.2 Cazul $q = e^g$

Atunci paranteza cuantică este:

$$[x] = \frac{sinh(gx)}{sinh(g)}$$

iar valorile proprii ale energiei se deduc din (4.2):

$$E_q(n) = \frac{\hbar\omega}{2sinh\frac{g}{2}} sinh\,(n+\frac{1}{2})g \tag{4.4}$$

Graficul $E = E_g(n)$ este redat în figura 2 de la sfârşitul lucrării.

1) Pentru $n = 0$ se obţine nivelul fundamental $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, invariant la deformare.

2) Pentru $ng \gg 1$ putem aproxima $sinh\,(n+\frac{1}{2})g \sim \frac{1}{2}e^{(n+\frac{1}{2})g}$ şi atunci:

$$E_g(n) \approx C(g)e^{ng}$$

Se observă că:

$$\frac{E_q(n+1)}{E_q(n)} = e^g \quad \text{şi} \quad \frac{E_q(n+1) - E_q(n)}{E_q(n) - E_q(n-1)} = e^g$$

Deci nivelele energetice cât şi liniile spectrale sunt în progresie geometrică. Multiplicitatea fiecărei linii este 1.

3) Dacă dezvoltăm după g (valori mici), obţinem pentru nivelele energetice următoarea expresie:

$$E_q(n) = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) + \frac{\hbar\omega}{6}(n+\frac{1}{2})(n^2+n)g^2 + \cdots$$

adică un spectru de oscilator anarmonic.

4.1.3 Cazul $q = e^{\sigma + ig}$

În acest caz paranteza cuantică arată destul de complicat:

$$[x] = \frac{cosh(\sigma(x+1))cos(g(x-1)) - cosh(\sigma(x-1))cos(g(x+1))}{cosh(2\sigma) - cos(2g)} +$$

$$+ i\frac{sinh(\sigma(x+1))sin(g(x-1)) - sinh(\sigma(x-1))sin(g(x+1))}{cosh(2\sigma) - cos(2g)}$$

Pentru σ mic aproximăm în primul ordin:

$$[x] = \frac{sin(gx)}{sin(g)} + i\sigma\frac{(x+1)sin(g(x-1)) - (x-1)sin(g(x+1))}{2sin^2 g}$$

Înlocuind în (4.2) obţinem următoarele valori:

$$E_q(n) = E_g(n) + i\sigma\Delta_g(n)$$

unde $E_g(n)$ este dat de (refe43), iar:

$$\Delta_g(n) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{sin(ng)}{2sin^2\frac{g}{2}} - \frac{cos(n+\frac{1}{2})g}{sin\frac{g}{2}}\right)$$

4.2 Analiza Spectrului Rotaţional

În analiza spectrului unui rotator rigid deformat avem două căi: prima este de a deforma hamiltonianul astfel încât să rămână element Cazimir în algebra deformată, iar a doua cale este de a păstra definiţia hamiltonianului, dar de a deforma acţiunea sa. Vom analiza pe rând cele două posibilităţi.

4.2.1 Hamiltonianul ca element Cazimir

Aşa cum am văzut în finalul capitolului anterior, element Cazimir al grupului $SU_q(2)$ îl constituie operatorul:

$$C_2 = J_-J_+ + [J_3][J_3+1]$$

cu valorile proprii:

$$C_2|jm> = [j][j+1]|jm>$$

Astfel, dacă postulăm că hamiltonianul rotatorului rigid este proporţional cu elementul Cazimir C_2 plus un multiplu de unitate obţinem:

$$H = \frac{\hbar^2}{2I}C_2 + E_0$$

(I=momentul de inerţie al rotatorului) şi atunci valorile proprii ale energiei vor fi:

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I}[j][j+1] + E_0 \tag{4.5}$$

În cazul $q = e^{ig}$ obţinem:

$$E_g(j) = \frac{\hbar^2}{2I}\frac{sin(gj)sin(g(j+1))}{sin^2(g)} + E_0$$

O dezvoltare în serie după parametrul g (pentru $gj \ll 1$) duce la:

$$E_g(j) = \tfrac{\hbar^2}{2I}(j(j+1)(1+\frac{g^2}{6}) - j^2(j+1)^2\frac{g^2}{3}) + E_0 \tag{4.6}$$

Obţinem astfel o formulă corectivă la nivelele energetice obişnuite ale rotatorului rigid nedeformat.

O astfel de formulă se poate aplica atât în fizica atomică cât şi în cea nucleară.

În studiul spectrelor moleculare biatomice este frecvent utilizat un potenţial de tip Morse:

$$U(r) = D(1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$$

pentru care nivelele energetice au forma:

$$E_{nj} = \hbar\omega((n+\frac{1}{2}) - B_1(n+\frac{1}{2})^2) + \tfrac{\hbar^2}{2I}(j(j+1) - B_2 j^2(j+1)^2) + B_3(n+\frac{1}{2})j(j+1) + \cdots$$

Dacă neglijăm spectrul vibraţional obţinem:

$$E_{-,j} = \tfrac{\hbar^2}{2I}(j(j+1) - B_2 j^2(j+1)^2) + \Delta$$

formulă care este asemănătoare cu (4.6).

Se observă că parametrul de deformare al grupului poate fi luat:

$$g = \sqrt{3B_2}$$

şi obţinem o bună aproximaţie a spectrului Morse.

În studiul spectrelor de rotaţie ale nucleelor par-pare deformate se utilizează o formulă aproximativă de tipul:

$$E_j = E_0 + \tfrac{\hbar^2}{2I}(j(j+1) - Bj^2(j+1)^2 + Cj^3(j+1)^3 - \cdots)$$

unde ordinul coeficienţilor este: $B = 10^{-3}$, $C = 10^{-6}$. Atunci formula de mai sus se poate aproxima cu (4.6) pentru $g = 0.053$. (vezi [Bona91]).

4.2.2 Deformarea acţiunii

Ideea este următoarea: Să păstrăm definiţia hamiltonianului utilizând momentul cinetic total astfel:

$$H = \tfrac{\hbar^2}{2I} J^2 = \tfrac{\hbar^2}{2I}(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) = \tfrac{\hbar^2}{2I}(J_+J_- + J_3^2 - \frac{1}{2}[J_+, J_-])$$

Acum utilizând relaţiile de comutare (3.1) obţinem:

$$H = \tfrac{\hbar^2}{2I}(J_+J_- + J_3^2 - \frac{1}{2}[2J_3])$$

Valorile proprii ale acestui hamiltonian vor fi atunci:

$$E_q(j,m) = \tfrac{\hbar^2}{2I}([j+m][j-m+1] + m^2 - \frac{1}{2}[2m]) \tag{4.7}$$

Se observă că noul hamiltonian nu este element Cazimir al sistemului, dar valorile sale proprii (4.7) prezintă o serie de proprietăţi interesante pe care le vom enumera în continuare:

1) Avem că: $E_q(j,-m) = E_q(j,m)$

Acest lucru rezultă din formulele:

$$J^2 = J_-J_+ + J_3^2 + \frac{1}{2}[J_+, J_-]$$

$$[-2m] = -[2m]$$

Atunci:

$$E_q(j,m) = \tfrac{\hbar^2}{2I}([j-m][j+m+1] + m^2 + \frac{1}{2}[2m])$$

şi deci:

$$E_q(j,-m) = \tfrac{\hbar^2}{2I}([j+m][j-m+1] + m^2 - \frac{1}{2}[2m]) = E_q(j,m)$$

2) Din proprietatea de mai sus rezultă că multiplicitatea unui nivel este 2 pentru $m \neq 0$ şi 1 pentru $m = 0$.

3) În limita $q \to 1$ obţinem formulele uzuale pentru energia rotatorului rigid:

$$E(j) = \tfrac{\hbar^2}{2I} j(j+1)$$

În plus, multiplicitatea unei linii energetice (pentru cazul nedeformat) este $2j+1$.

4) În cazul $q = e^{ig}$ obţinem:

$$E_g(j,m) = \tfrac{\hbar^2}{2I}\left(\frac{sin(g(j+m))sin(g(j-m+1))}{sin^2 g} + m^2 - \frac{1}{2}\frac{sin(2mg)}{sin(g)}\right)$$

Dependenţa $E = E_g(j,m)$ este reprezentată în figurile 5 şi 6 de la sfârşitul lucrării. Se remarcă, că pentru g în vecinătatea lui $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$ dependenţa energetică se face în special de termenul m^2:

$$E_{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}}(j,m) = \tfrac{\hbar^2}{2I}m^2$$

Capitolul 5

Concluzii

În lucrarea de faţă am încercat să prezentăm construcţia grupurilor cuantice ca obiecte deformate fie ale inelului de coordonate, fie ale algebrei înfăşurătoare universale a algebrei Lie asociată. De asemeni am prezentat câteva posibile aplicaţii ale acestei construcţii şi anume în studiul spectrelor vibraţionale sau rotaţionale ale moleculelor. Desigur lucrarea nu cuprinde o descriere exhaustivă a domeniului, acesta fiind în plină evoluţie.

Este posibil ca după parcurgerea ei, mai multe întrebări să se nască decât răspunsuri. Să încercăm să rememorăm mai întâi faptele:

Construcţia matematică a început odată cu observaţia că în spatele unui grup Lie (algebric sau analitic) se află o construcţie mult mai subtilă şi anume inelul de coordonate. Extragerea grupului din această structura algebrică se face determinând spectrul inelului (adică mulţimea idealelor prime). Mai mult, structura de grup induce în acest inel de coordonate o structură de algebră Hopf. Această observaţie este fundamentală în evoluţia lucrurilor. (Trebuie spus, în context, că legătura între inelul de coordonate al unei mulţimi cu acea mulţime nu este un lucru banal; faptul apare mai pregnant dacă ne gândim că în geometria algebrică varietăţile algebrice pot conţine singularităţi d.p.d.v. al geometriei diferenţiale, singularităţi care pot fi tratate prin metode pur algebrice!).

Un alt fapt important vine din constatarea că toate aplicaţiile grupului (acţiuni sau reprezentări) pot fi ridicate până la nivelul algebrei Hopf, problema reprezentării reducându-se la găsirea tuturor comodulelor peste algebra Hopf respectivă.

O altă algebră Hopf mai uşor de mânuit este algebra înfăşurătoare universală. Aceasta se construieşte pentru orice algebră Lie şi reprezintă (via teorema PBW) algebra operatorilor diferenţiali stâng invarianţi. Tot un fapt algebric îl constituie şi legătura între cele două algebre Hopf construite deja, şi anume dualitatea ce există între ele (sub condiţia de conexitate şi simplu conexitate a grupului şi semisimplicitate a algebrei Lie).

Având aceste "scule" gata pregătite (pornind de la un grup Lie), este naturală considerarea unor structuri modificate ("deformate") care să păstreze totuşi anumite caracteristici esenţiale. Această esenţialitate este dată de structura de algebră Hopf. Astfel, atunci când se face deformarea structurii se caută acele deformări care păstrează structura de algebră Hopf. În matematică, construcţia unor algebre Hopf ne-comutative şi ne-cocomutative s-a numit "cuantificare" (*quantization*). Astfel au apărut aceste obiecte noi, şi anume grupurile cuantice.

Primele aplicaţii au fost atât de natură fizică cât şi matematică: pe de o parte a fost metoda împrăştierii inverse cât şi construcţia de exemple generice de algebre Hopf necomutative sau necocomutative. Între timp acestea au căpătat o arie mult mai largă de răspîndire încât se poate pune problema dacă chiar există ceva în spatele lor mult mai ascuns fizic sau este doar o modă, o modalitate mai simplă de a explica diferenţe uneori calitative prin introducerea unor parametri liberi din care să se poate regla modelul ?

Prima înterbare care poate cineva să şi-o pună ar fi ce semnificaţie are parametrul de deformare (notat q) ? Întrebarea aceasta este probabil cea mai importantă şi totodată cea mai dificilă. Discuţia acestei probleme ne propunem s-o amânăm la sfârşitul acestei secţiuni de concluzii.

În partea de aplicaţii ne-am ocupat exclusiv de aplicaţiile reprezentărilor bosonice finit dimensionale ale lui $SU_q(2)$ în studiul spectrelor vibraţionale şi rotaţionale.

În fapt, în studiul spectrului vibraţional am pornit cu q-oscilatorul armonic cuantic deformat şi am studiat spectrul acestuia, depinzând de valorile parametrului de deformare. Trebuie să subliniem că valori reale pentru energia totală se pot obţine doar dacă parametrul de deformare este real sau de modul unitate. Aceste două cazuri par a fi singurele de importanţă în literatură. În cazul în care parametrul de deformare este complex, dar nu unitar, am găsit o formulă aproximativă în calculul valorilor proprii. Merită amintit rezultatul obţinut relativ la spectrul oscilatorului deformat cu un parametru unitar: dacă parametrul este o rădăcină a unităţii atunci se obţine un spectru discret, finit şi cu un numă par de linii; în caz contrar spectrul este o bandă mărginită şi simetrică.

Mai mult, în primul caz multiplicitatea este infinită pe când în al doilea caz aceasta este simplă.

În studiul spectrului de rotaţie avem o alegere de făcut încă de la început asupra hamiltonianului: să deformăm şi operatorul astfel încât să rămână element Cazimir sau să deformăm acţiunea sa, păstrându-i forma ? În primul caz se obţine o formulă pentru nivelele energetice care aproximează bine spectrul rotaţional Morse pentru molecule biatomice sau spectrul rotaţional al unor nuclee deformate. Degenerarea nivelelor se păstrează ca în cazul nedeformat. În al doilea caz se obţine o structură complet nouă de nivele energetice, degenerarea nivelelor fiind 2 sau 1, depinzând de m.

Aceste două cazuri pot fi generalizate şi la nivelul ecuaţiei Schrödinger radiale, obţinânduse în final două structuri de linii spectrale complet diferite şi având de asemeni degenerări distincte. Multe motive ne-ar sugera că prima cale ar fi mai corectă. Oricum ar rămâne întrebarea ce semnificaţie o are al doilea tip de deformare ?

Revenim în încheiere la problema semnificaţiei fizice a parametrului de deformare. Prezentăm diversele posibilităţi sugerate în literatură, dar mai ales în articolul lui Ng ([YGNg90]). Vom nota cu $\gamma = ln\, q$:

1) O posibilitate ar fi ca parametrul γ să reprezinte curbura spaţiului Hilbert al stărilor din mecanica cuantică. Astfel operatorii asociaţi observabilelor nu ar mai acţiona într-un spaţiu plat, ci într-unul curb.

2) O altă interpretare vine din următoarea observaţie: în deformarea lui $SU(2)$ (dar şi a lui $SL(2)$) remarcăm existenţa sinusului hiperbolic în definirea deformării. Acest sinus hiperbolic are seria Taylor formată din puteri impare cu exponenţii din 2 în 2. În mecanica cuantică se neglijează efectul măsurării asupra observatorului, ci se ţine cont doar de efectul acestuia asupra stării. Astfel se poate presupune că parametrul γ ar măsura efectul reacţiei inverse a sistemului de studiu asupra observatorului. Acest efect adiţional s-ar întoarce asupra sistemului în ordinul doi, după care se propagă înapoi prin lanţ.

3) Cea de a treia interpretare se bazează pe faptul că axele de coordonate sunt tratate diferit în urma deformării algebrei $su(2)$. Astfel parametrul γ ar măsura ruperea de simetrie rotaţională.

Bibliografie

[Abe80] E.Abe , **HOPF Algebras**, Cambridge University Press, 1980

[Bied89] L.C.Biedenharn, *The quantum group $SU_q(2)$ and q-analogue of the boson operators*, J.Phys. A : Math.Gen. **22**, L873–L878, 1989

[Bona91] D.Bonatsos, *Quantum Algebras in Nuclear Phisics*, Invited talk given at the "International Symposium on Group Theory and Special Symmetries in Nuclear Physics", Ann Arbor, Michigan, sept.1991

[BoDaKo91] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis & K.Kokkotas, *WKB equivalent potentials for the q-deformed harmonic oscillator*, J.Phys. A :Math.Gen. **24**,L795-801, 1991

[BoDaKo92] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis & K.Kokkotas, *WKB equivalent potentials for q-deformed harmonic and anharmonic oscillators*, J.Math.Phys. **33** (9), Sept. 1992

[Drin83] V.G.Drinfel'd, *Hamiltonian Structures on Lie Groups, Lie Bialgebras and the Geometrical Meaning of the Classical Yang-Baxter Equations*, Soviet.Math.Dokl. vol.27, No.1, 1983

[Drin85] V.G.Drinfel'd, *Hopf Algebras and the Quantum Yang-Baxter Equations*, Soviet.Math.Dokl. vol.32, No.1, 1985

[Drin88] V.G.Drinfel'd, *A New Realization of Yangians and Quantized Affine Algebras*, Soviet.Math.Dokl., vol.36, No.2, 1988

[Drin86] V.G.Drinfel'd, *Quantum Groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, USA, 1988

[MacF89] A.J.MacFarlane, *On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group* $SU_q(2)$, J.Phys. A: Math.Gen. **22**, 1989

[Maek91] T.Maekawa, *On the Wiegner and the Racah coefficients of* $SU_q(2)$ *and* $SU_q(1,1)$, J.Math.Phys. **32** (10), Oct. 1991

[Manin88] Yu.I.Manin, *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*, în Les publications du Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1988

[YGNg90] Y J Ng, *Comment on the q-analogues of the harmonic oscillator*, J.Phys. A : Math.Gen. **23** pp.1023–1027, 1990

[Nico88] L.Nicolescu, **Grupuri şi Algebre Lie**, Curs litografiat, Universitatea Bucureşti, 1988

[Rosso87] M.Rosso, *Comparaison des groupes SU(2) de Drinfeld et de Woronowicz*, C.R.Acad.Sci. Paris, **304**, pp.323-326, 1987

[Safa76] I.R.Şafarevici, **Bazele Geometriei Algebrice**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1976

[Smit92] S.P.Smith, *Quantum Groups: An Introduction and Survey for Ring Theorists*, din **Noncommutative Rings**, S.Montgomery şi L.Small editori, Springer Verlag, 1992

[Vara74] V.S.Varadarajan, **Lie Groups, Lie Algebras and their Representations**, Prentice-Hall, 1974