C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 169-170 (10 janvier 1972) Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Ensembles de Helson et synthèse spectrale.* Note (*) de M. **John J. Benedetto**, présentée par M. Jean Leray.

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $A(\mathbf{T})$ l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbf{T}$ dont la série de Fourier converge absolument et $E \subseteq \mathbf{T}$ un fermé totalement discontinu. Les notations non précisées sont celles de [1].

1. Algèbres sur $\mathbf{T}$ obtenues par limite inductive. — Soit G le groupe additif des éléments réels de $A(\mathbf{T})$, considéré avec la topologie discrète, et soit Γ son dual. Pour chaque $\psi \in A(\Gamma)$ (i. e. ψ est une fonction continue sur Γ dont la série de Fourier converge absolument), on définit

$$G_\psi = \{\varphi \in G : \hat{\psi}(\varphi) \neq 0\}.$$

Pour chaque $k > 0$ on pose

$$\mathcal{A}_k = \{\psi \in A(\Gamma) : \forall\, \varphi \in G_\psi,\ \|\varphi\|_{A(\mathbf{T})} \leq k\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \cup\, \mathcal{A}_k$ muni de la topologie limite inductive où les $\mathcal{A}_k$ sont munis de la topologie induite par celle de $A(\Gamma)$. Si G sont les éléments réels de $A(\mathbf{T})$ qui sont continuement différentiables on définit de façon analogue

$$\mathcal{B}_k = \{\psi \in A(\Gamma) : \forall\, \varphi \in G_\psi,\ \|\varphi'\|_\infty \leq k\}$$

et $\mathcal{B}$ sera la limite inductive des $\mathcal{B}_k$.

L'injection $u : \mathbf{T} - \Gamma$, $\gamma \rightsquigarrow f_\gamma$, définie par $(f_\gamma, \varphi) = e^{i\varphi(\gamma)}$ est continue; puisque l'application canonique $\mathcal{A} \to A(\mathbf{T})/j(E)$ il en résulte que $u : PM(E) \to \mathcal{A}'$ est une injection continue. On a aussi que $PM(\Gamma) \subseteq \mathcal{A}'$ car $\mathcal{A}$ est bornologique, $\mathcal{A}$ étant une algèbre commutative avec élément unité 1 pour le produit ponctuel. On obtient des propriétés analogues pour $\mathcal{B}$.

2. Un critère pour que des ensembles de Helson soient de synthèse spectrale. — Si $X \subseteq \mathcal{A}$ est une sous-algèbre, soit $X(uE)$ l'algèbre restriction de X à uE, et $C(uE)$ l'espace des fonctions continues sur le compact totalement discontinu uE. On obtient alors une nouvelle définition d'un Helson, à savoir

Proposition 1. — *E est un Helson* $\Leftrightarrow \mathcal{A}(uE) = C(uE)$.

Soit $X \subseteq \mathcal{A}$ *et* $Y \subseteq u\,PM(E)$; uE *est un* ensemble de synthèse spectrale pour (X, Y) *si chaque* $t \in Y$ *est bien défini sur* $X(uE)$.

En remarquant que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, on obtient

Proposition 2. — *Si la mesure de Lebesgue,* $m(E)$, *est nulle alors* uE *est un ensemble de synthèse spectrale pour* $(\mathcal{B}, u\,PM(E))$.

Proposition 3. — *Soit* E *un Helson* [*donc* $m(E) = 0$]. E *est de synthèse* $\Leftrightarrow uE$ *est de synthèse spectrale pour* $(\mathcal{A}, u\,PM(E))$.

Soit

$$h = \{ \psi \in \mathcal{A} : \sup u' \psi \cap E = \varnothing \}$$

où $u' : \mathcal{A} \to A(T)$ *est l'application canonique et*

$$j(u E) = \{ \psi \in A(\Gamma) : \operatorname{supp} \psi \cap u E = \varnothing \}.$$

En notant $\overline{j(u E)}$ la fermeture de $j(u E)$ dans $A(\Gamma)$ et $\bar{h}$ celle de h dans $\mathcal{A}$ on a

Proposition 4. — *Soit* E *un Helson. Si* $\mathcal{A} \cap \overline{j(u E)} \subseteq \bar{h}$ *alors* E *est de synthèse spectrale.*

3. Un critère pour que $M(E) = PM(E)$. — Soit $F \subseteq E$ un compact ouvert et $t \in \mathcal{A}'$. Nous définissons

$$\forall \Phi \in \mathcal{A}, \quad \langle t_F, \Phi \rangle = \langle t, \psi_F \Phi \rangle,$$

où

$$\psi_F(f) = (1 - e^t)^{-1} (1 - (f, \psi_F)),$$

$\psi_F \in G$ étant égale à 1 dans un voisinage de F et nulle dans un voisinage de $E - F$. t_F est un élément bien défini de $\mathcal{A}'$.

$\{ F_1, \ldots, F_k \}$ est appelé une *décomposition finie de* E si les F_j sont compacts ouverts dans E, deux à deux disjoints et leur union est E tout entier.

$\mathcal{A}'$ est de Fréchet avec les semi-normes

$$q_n(t) = \sup_{\psi \in A_n} | \langle t, \psi \rangle | \qquad (n = 1, \ldots),$$

où $A_n = \{ \psi \in Q_n : \| \psi \|_{A(\Gamma)} \leq n \}$.

Proposition 5. — *Soit* $T \in PM(E)$. *Supposons que pour un nombre infini de n il existe* $K_n > 0$ *tel que pour chaque décomposition finie* $\{ F_1, \ldots, F_k \}$ *de* E *on ait*

$$\sum_{j=1}^{k} q_n(t_{F_j}) \leq K_n \qquad (u T = t).$$

Alors $t \in M(u E)$ *et* $T \in M(E)$.

Cette proposition fournit un critère meilleur que l'habituel où on demande

$$\sup \sum \| T_{F_j} \|_{PM} < \infty$$

parce que $u : PM(E) \to \mathcal{A}'$ est continue mais n'est pas ouverte.

(*) Séance du 20 décembre 1971.

([1]) J. J. Benedetto, *Harmonic Analysis on totally disconnected sets* (*Lectures Notes*, 202, Springer-Verlag, 1971.)

Mathematics Departments,
University of Maryland,
College Park, Maryland 20742,
U. S. A.