Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Formulation cinétique des lois de conservation scalaires multidimensionnelles

Pierre-Louis LIONS, Benoît PERTHAME et Eitan TADMOR

Résumé — Nous montrons que les lois de conservation scalaires multidimensionnelles, et certains systèmes, peuvent se reformuler sous forme d'une équation cinétique. Les lemmes de moyennes en vitesses donnent alors des résultats de régularité ou de compacité de la solution pour des données initiales bornées dans $L^1 \cap L^\infty$.

Kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws

Abstract — *We show that multidimensional scalar conservation laws, and some systems, can be reformulated as a kinetic equation. Then, the velocity averaging lemmas give regularity or compactness results on the solution for initial data which are bounded in* $L^1 \cap L^\infty$.

Abridged English Version — We consider a scalar conservation law

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(u))=0 \quad \text{for} \quad t \geqq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

with a given initial condition $u|_{t=0}=u_0(x) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. We denote by u the weak solution of (1) satisfying the entropy condition

(2) $$\frac{\partial}{\partial t}(S(u))+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_i(u)) \leqq 0 \quad \text{in } \mathscr{D}',$$

for any convex function S and η is given by: $\eta_i'=S' a_i$ where $a_i=A_i'$ is assumed to be locally Lipschitz on $\mathbb{R}$.

We denote by $\chi_u(v)$ the function defined for $u, v \in \mathbb{R}$ by

(3) $$\chi_u(v)=1 \quad \text{if } 0 \leqq v \leqq u, \qquad =-1 \quad \text{if } u \leqq v \leqq 0, \qquad =0 \quad \text{otherwise.}$$

THEOREM 1. — 1. *The solution* $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^n))$ *of* (1), (2) *satisfies*

(4) $$\frac{\partial f}{\partial t}+a(v) . \nabla_x f=\frac{\partial m}{\partial v} \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v \times(0, \infty))$$

where

(5) $$f(x, v, t)=\chi_{u(t, x)}(v) \quad \text{and} \quad \int f(x, v, t)\, dv=u(t, x) \quad a.e.$$

(6) *m is a bounded nonnegative measure on* $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v \times (0, \infty)$.

In particular, we have

(7) $$\int_{\mathbb{R}_x^n \times(0, \infty)} dm(x, ., t) \leqq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad a.e.\ v \in \mathbb{R}.$$

2. *There exists a unique solution* (f, m) *of* (4)-(6) *such that*

$$f \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}_x^n; L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v)) \quad \text{and} \quad f|_{t=0}=\chi_{u_0(x)}(v).$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0764-4442/91/03120097 $ 2.00 © Académie des Sciences

In addition,

$$u=\int f\,dv \text{ is the unique solution of (1)-(2) in } L^\infty((0,\infty\times\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(0,\infty;L^1(\mathbb{R}^n))$$

such that $u|_{t=0}=u_0(x)$.

One consequence of this result is a regularizing effect that we state below and which is based upon a nondegeneracy condition

$$(8)\quad \begin{cases} \forall R\in(0,\infty),\qquad \exists\alpha>0,\qquad \exists C\geqq 0,\\ \sup[\operatorname{mes}\{|v|\leqq R,\ |\tau+a(v).\xi|\leqq\delta\}\,|\,\tau^2+|\xi|^2=1,\ \tau\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^n]\leqq C\delta^\alpha \text{ for all } \delta\in[0,1]. \end{cases}$$

We also denote by $M=\|u_0\|_{L^\infty}$, $K=\|u_0\|_{L^1}$ and by α the exponent given by (8) for $R=M$.

COROLLARY 2. — *Let u be the solution of (1), (2) as in Theorem 1. We assume (8). Then, we have for all $\varepsilon\in(0,1)$ and all $s\in(0,\alpha/(\alpha+2))$*

$$(9)\qquad \|u\|_{W^{s,p}((\varepsilon,1/\varepsilon)\times\mathbb{R}^n)}\leqq C(s,\varepsilon,M,K)\qquad \textit{where } p=\frac{4+\alpha}{2+\alpha}$$

$$(10)\qquad u\in C(0,\infty;W^{s,1}(\mathbb{R}^n)),\qquad \sup_{t\geqq\varepsilon}\|u(t,\,.)\|_{W^{s,1}}\leqq C(s,\varepsilon,M,K)$$

$$(11)\qquad \int_0^T\int_{|x|\leqq R}\left|\int_0^u |v|\sqrt{|a(v)|}\,dv\right|dt\,dx\leqq C\|u_0\|_{L^2},\quad \textit{for all } R>0.$$

Similar results hold for the system of isentropic gas dynamics

$$(12)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0\quad\text{for } t\geqq 0,\ x\in\mathbb{R},\qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+\rho^3/12)=0.$$

THEOREM 3. — *Let $\rho_0\geqq 0$, ρ_0u_0, $\rho_0u_0^2$, $\rho_0^3\in L^1(\mathbb{R})$. Then there exists an entropy solution of (12) such that $\rho|_{t=0}=\rho_0$, $(\rho u)|_{t=0}=\rho_0u_0$ which satisfies*

$$(13)\qquad \frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial^2}{\partial v^2}m\quad \textit{in } \mathscr{D}'$$

$$(14)\qquad f(x,v,t)=\xi_{\rho(t,x)}(v-u(t,x))\quad \textit{a.e.}$$

where $\xi_\rho(w)=1$ if $|w|\leqq\rho/2$, $=0$ otherwise.

$$(15)\qquad \begin{cases} m \textit{ is a bounded nonnegative measure on } \mathbb{R}^2\times(0,\infty) \textit{ such that}\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_x\times(0,\infty)} dm(x,\,.\,,t)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_v). \end{cases}$$

In fact, some partial regularity on ρ, ρu^2, ρ^3, ρu can be deduced from (13)-(15) and yields the

COROLLARY 4. — *Let $\rho_0^\varepsilon\geqq 0$, $\rho_0^\varepsilon u_0^\varepsilon$, $\rho_0^\varepsilon(u_0^\varepsilon)^2$, $(\rho_0^\varepsilon)^3$ be bounded in $L^1(\mathbb{R})$ and let $(\rho^\varepsilon,\rho^\varepsilon u^\varepsilon)$ be an entropy solution of (12) corresponding to the initial conditions $(\rho_0^\varepsilon,\rho_0^\varepsilon u_0^\varepsilon)$.*
Then, ρ^ε, $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$, $\rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2$, $(\rho^\varepsilon)^3$ are locally compact in $L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}_x)$.

I. INTRODUCTION. — Nous donnons ici une nouvelle formulation des lois de conservation scalaire en plusieurs dimensions d'espace fondée sur une approche cinétique. Plus précisément, nous considérons une équation

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(u))=0\qquad \text{pour } t\geqq 0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

avec une donnée initiale $u|_{t=0}=u_0(x)\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nous considérons uniquement les solutions dites entropiques de (1), c'est-à-dire celles qui satisfont la condition de Lax :

$$\frac{\partial}{\partial t}(S(u))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_i(u))\leqq 0 \quad \text{dans } \mathscr{D}' \tag{2}$$

pour toute fonction convexe S et où η_i vérifie : $\eta_i'=A_i'S'$ $(\forall i)$, et nous supposons pour simplifier que $a_i=A_i'$ est localement Lipschitz sur $\mathbb{R}$. Nous renvoyons par exemple à [12] pour un exposé des motivations, de la théorie générale de l'existence et de l'unicité et pour une liste (partielle) de références.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, nous présentons une nouvelle formulation de type cinétique du système (1)-(2). Cette formulation a de nombreuses applications. Elle entraîne en particulier des résultats de régularisation des solutions en temps positif sous des hypothèses de non dégénérescence sur le champ A. De tels effets régularisant n'étaient connus qu'en dimension 1 pour des flux (A) très particuliers. Une autre application est l'étude de la compacité (forte *i.e.* L^1_{loc}) de familles bornées de solutions u_ε de (1)-(2) c'est-à-dire correspondant à des données initiales bornées dans $L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas $n=1$, cette question a été résolue par L. Tartar grâce à la théorie de la compacité par compensation ([9], [13]), sous une hypothèse de non dégénérescence de A. Nous étendons donc ici ce type d'hypothèses et de résultats au cas de dimension n quelconque.

La formulation cinétique que nous introduisons peut se déduire d'une limite hydrodynamique proposée par B. Perthame et E. Tadmor [11] : en effet, dans [11] est introduit un modèle de Boltzmann convenable approchant (1). La loi de conservation scalaire peut être retrouvée quand ε tend vers 0 à partir du modèle

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}+a(v).\nabla_x f_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}(f_\varepsilon-\chi_{u_\varepsilon}(v))=0,\qquad t\geqq 0,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad v\in\mathbb{R} \tag{3}$$

$$f_{\varepsilon\,|\,t=0}=\chi_{u^0}(v),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad v\in\mathbb{R} \tag{4}$$

où nous notons

$$a_i(v)=A_i'(v)\qquad(\forall i) \tag{5}$$

$$u_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x,v,t)\,dv \tag{6}$$

$$\chi_u(v)=1 \text{ si } 0\leqq v\leqq u,\qquad =-1 \text{ si } u\leqq v\leqq 0,\qquad =0 \text{ sinon.} \tag{7}$$

L'équation (3) est une équation hyperbolique semilinéaire avec une non-linéarité non locale provenant de χ_ε. Dans [11], il est montré que la théorie de Kruzkov s'applique à l'équation (3) et permet aussi de prouver que, lorsque ε tend vers 0, u_ε converge p.p. vers une solution de (1)-(2).

Nos résultats précisent cela en montrant notamment que $u(x,t)$ vérifie aussi une équation cinétique. Le passage à la limite quand ε tend vers 0 et diverses propriétés des solutions u sont d'ailleurs déduits des résultats de compacité des moyennes en vitesses de ([3], [4]), qui sont une généralisation des résultats initialement obtenus dans ([6], [7]) — *voir* aussi [5] pour une autre généralisation. Notons que de tels résultats ont été utilisés pour la première fois dans [1] pour obtenir des limites fluides.

Nous présentons dans cette Note des résultats analogues pour le système de la dynamique des gaz isentropiques monoatomiques et unidimensionnels.

II. LOIS DE CONSERVATION SCALAIRE.

THÉORÈME 1. — 1. *La solution* $u \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^n))$ *de* (1), (2) *vérifie*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(v).\nabla_x f = \frac{\partial m}{\partial v} \quad dans\ \mathcal{D}' \tag{8}$$

avec

$$f(x, v, t) = \chi_{u(t, x)}(v), \qquad \int f(x, v, t)\, dv = u(t, x) \quad p.p. \tag{9}$$

$$m \text{ est une mesure positive bornée sur } \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v \times [0, \infty). \tag{10}$$

En particulier, on a

$$\int_{\mathbb{R}_x^n \times (0, \infty)} dm(x, ., t) \leqq \| u^0 \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad p.p.\, v \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

2. *Il existe une unique solution* (f, m) *de* (8)-(10) *telle que*

$$f \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}_x^n; L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v)) \qquad et \qquad f|_{t=0} = \chi_{u^0(x)}(v).$$

De plus, $u = \int f\, dv$ *est l'unique solution de* (1)-(2) *dans*

$$L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^n))$$

telle que $u|_{t=0} = u^0(x)$.

Remarques. — 1. Il est important de noter que l'équation (8) est linéaire : le caractère non linéaire de (1) est uniquement reflété par la contrainte (9) — que nous avons volontairement rendue redondante puisque $f = \chi_u$ implique $\int f\, dv = u$.

2. La formulation (8)-(10) peut se retrouver (au moins heuristiquement) à partir de (1)-(2) en posant $f = \chi_u$, $T = (\partial f / \partial t) + a(v).\nabla_x f$. T est alors une distribution dont il faut montrer que $T = \partial m / \partial v$ où m vérifie (10). Si $\psi \geqq 0$ sur $\mathbb{R}$ et φ est une primitive de ψ, on voit que $\langle T, \varphi \rangle_v \leqq 0$ grâce à (2). Ceci permet de vérifier que $T = \partial m / \partial v$ avec m mesure positive. Une autre manière de déduire cette formulation consiste à appliquer un lemme dû à Y. Brenier [2] sur les entropies cinétiques.

3. Il est montré dans [11] que si $u \in C^1(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, alors $m = 0$ sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}_v$: m est donc « portée par les chocs ».

4. Le résultat précédent ainsi que les résultats qui suivent peuvent être généralisés à des cas inhomogènes comme dans [11]. □

Une première application de la formulation (8)-(10) est la compacité forte des familles bornées de solutions de (1)-(2).

COROLLAIRE 2. — *On suppose que* A *vérifie*

$$\forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n - \{(0, 0)\}, \qquad \text{mes}\{v / \tau + a(v).\xi = 0\} = 0. \tag{12}$$

Si $(u_n)_n$ *est une suite de solutions de* (1)-(2) *bornées dans*

$$L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}^n)),$$

alors $(u_n)_n$ *est relativement compacte dans* $L^p_{\text{loc}}(0, \infty \times \mathbb{R}^n)$ *pour tout* $1 \leqq p < \infty$.

Remarques. — 1. La condition (12) est une condition faible exprimant le caractère vraiment non linéaire de l'équation (1) — nous utiliserons d'ailleurs ci-dessous une version plus restrictive de (12). Elle signifie essentiellement qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant « une partie » de la courbe $(v \to a(v))$. Cette condition généralise donc à plusieurs dimensions la condition introduite par L. Tartar [13] dans le cas $n=1$.

2. Le même résultat s'applique à des suites de solutions approchées de (1)-(2) comme par exemple des solutions de (3)-(4) ou de régularisations diffusives de (1)-(2). □

Nous présentons maintenant deux applications de la formulation (8)-(10) qui donnent des bornes ou des effets régularisant sur les solutions de (1)-(2).

COROLLAIRE 3. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *u vérifie pour tout* $R \in]0, \infty[$

$$\int_0^T \int_{|x| \leqq R} \left| \int_0^u |v| \sqrt{|a(v)|}\, dv \right| dx\, dt \leqq C \| u^0 \|_{L^2}. \tag{13}$$

COROLLAIRE 4. — *Sous les hypothèses du théorème* 1 *et si* A *vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall R \in (0, \infty), \quad \exists \alpha > 0, \quad \exists C \geqq 0, \\ \sup [\operatorname{mes} \{ |v| \leqq R, |\tau + a(v) . \xi | \leqq \delta \} | \tau^2 + |\xi|^2 = 1, \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n] \leqq C \delta^\alpha \\ \textit{pour} \quad \delta \in [0, 1], \end{array} \right. \tag{14}$$

alors u vérifie pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ *et pour tout* $s \in]0, \alpha/(\alpha+2)[$

$$\| u \|_{W^{s, p}((\varepsilon, 1/\varepsilon) \times \mathbb{R}^n)} \leqq C(s, \varepsilon, M, K) \qquad \textit{où} \quad p = \frac{4+\alpha}{2+\alpha} \tag{15}$$

$$u \in C(0, \infty; W^{s, 1}(\mathbb{R}^n)), \qquad \sup_{t \geqq \varepsilon} \| u(t, .) \|_{W^{s, 1}} \leqq C(s, \varepsilon, M, K) \tag{16}$$

où $M = \| u^0 \|_{L^\infty}$, $K = \| u^0 \|_{L^1}$ *et* α *est donné par* (14) *pour* $R = M$.

Remarque. — 1. Si $n=1$, des résultats analogues au corollaire 3 peuvent se déduire des effets régularisant dans L^∞_{loc} (*voir* [8]). Ce corollaire se démontre en utilisant les résultats de [10].

2. Si $n=1$, des effets régularisant du type de ceux énoncés dans le corollaire 4 ont été obtenus pour des flux strictement convexes (ou concaves) du type $A(v) = v^2$, auquel cas (14) est vérifiée avec $\alpha = 1$. Dans ce cas, on obtient classiquement une solution u dans BV ce qui veut dire essentiellement $W^{s, 1}$ avec $s=1$. Il est donc clair que la valeur limite $\alpha/(2+\alpha)$ obtenue ci-dessus n'est pas la meilleure possible (il est raisonnable de conjecturer que α devrait être la valeur limite). Toujours si $n=1$ et si $A(v) = |v|^m$ avec $m > 2$, on peut démontrer qu'il n'y a pas d'effet régularisant dans $W^{s, 1}$ si $s > 1/(m-1)$ (il y a en fait un effet régularisant dans $W^{s, 1}$ si $s < 1/(m-1)$) et on vérifie que (14) a lieu avec $\alpha = 1/(m-1)$. Ces exemples (en dimension 1 !) montrent que le type de résultat énoncé dans le corollaire 4 est optimal mais que la valeur limite de s ne l'est certainement pas.

III. LE SYSTÈME DE LA DYNAMIQUE DES GAZ ISENTROPIQUES, MONOATOMIQUES ET UNIDIMENSIONNELS. — Nous considérons maintenant le système

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \qquad \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \quad t \leqq 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{17}$$

où $p(\rho) = \rho^3/12$, $\rho \geqq 0$, $\rho|_{t=0} = \rho^0$, $\rho u|_{t=0} = \rho^0 u^0$ sur $\mathbb{R}$, $\rho^0 \geqq 0$, ρ^0, u^0 mesurables sur $\mathbb{R}$ et ρ^0, $\rho^0 u^0 \in L^1(\mathbb{R})$. Et nous l'approchons par le modèle cinétique suivant :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v . \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}(f_\varepsilon - \xi_{\rho_\varepsilon}(v - u_\varepsilon)) = 0, \qquad t \geqq 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{18}$$

où $\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \, dv$, $\rho_\varepsilon u_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon v \, dv$, $\xi_\rho(w) = 1$ si $|w| \leqq \rho/2, = 0$ sinon et $f_{\varepsilon \mid t=0} = \xi_{\rho^0}(v - u^0)$ sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$. Noter que toutes ces quantités sont définies sans ambiguïté puisque les valeurs de u_ε n'interviennent pas lorsque $\rho_\varepsilon = 0$.

THÉORÈME 5. — 1. *Si on suppose de plus que* $\rho^0 (u^0)^2 + (\rho^0)^3 \in L^1(\mathbb{R})$, *il existe une solution* f_ε *de* (18). *En outre, quand* ε *tend vers* 0, f_ε *converge dans* $L^p_{\mathrm{loc}}(]0, \infty[\times \mathbb{R}^2)$ *vers* $f(x, v, t) = \xi_{\rho(x,t)}(v - u(x, t))$ *solution de*

$$(19)\quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial v^2} m \quad \text{dans } \mathscr{D}', \qquad m \text{ mesure positive bornée sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, \infty[$$

et on a $\int dm(x, ., t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. *Enfin*, $(\rho, \rho u)$ *est une solution entropique de* (17).

2. *Réciproquement, si* $(\rho, \rho u)$ *est une solution entropique de* (17), $f = \xi_\rho(v - u)$ *vérifie les propriétés ci-dessus.*

COROLLAIRE 6. — *Sous les hypothèses du théorème* 5, *m est une mesure positive bornée sur* $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ *et* $\rho |u|^{7/3} + \rho^{13/6} \in L^1(0, T; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$.

COROLLAIRE 7. — *Soit une suite* $\rho_n^0, \rho_n^0 u_n^0, \rho_n^0 (u_n^0)^2, (\rho_n^0)^3)_n$ *bornée dans* $L^1(\mathbb{R})$ *avec* $\rho_n^0 \geqq 0$ *et soit* $(\rho_n, \rho_n u_n)$ *une solution entropique de* (17) *correspondante. Alors*, ρ_n, $\rho_n u_n$, $\rho_n (u_n)^2$, ρ_n^3 *sont relativement compactes dans* $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$.

Remarque. — En fait, on peut aussi obtenir des effets régularisant dans $W^{s,p}$ pour ρ, ρu, ρu^ε, ρ^3 !

Note remise et acceptée le 12 novembre 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. BARDOS, F. GOLSE, B. PERTHAME et R. SENTIS, The non-accretive radiative transfer equations: existence of solutions and Rosseland approximation, *J. Funct. Anal.*, 77, (2), 1988, p. 434-460.

[2] Y. BRENIER, Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires, *J. Diff. Eq.*, 50, (3), 1986, p. 375-390.

[3] R. DIPERNA et P.-L. LIONS, Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, XLII, 1989, p. 729-757.

[4] R. DIPERNA, P.-L. LIONS et Y. MEYER, L^p regularity of velocity averages, *Ann. I.H.P. Anal. Non. Lin.*, 1991 (à paraître).

[5] P. GÉRARD, *Moyennisation et régularité deux microlocale*, Preprint.

[6] F. GOLSE, B. PERTHAME et R. SENTIS, Un résultat de compacité pour les équations de transport, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 301, série I, 1985, p. 341-344.

[7] F. GOLSE, P.-L. LIONS, B. PERTHAME et R. SENTIS, Regularity of the moments of the solution of a transport equation, *J. Funct. Anal.*, 76, (1), 1988, p. 110-125.

[8] T. P. LIU et M. PIERRE, Source-solutions and asymptotic behavior n conservation laws, *J. Diff. Eq.*, 51, 3, 1984, p. 419-441.

[9] F. MURAT, Compacité par compensation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 5, 1978, p. 489-507.

[10] B. PERTHAME, Higher moments for kinetic equations. Applications to Vlasov-Poisson and Fokker-Planck Equations, *Math. Methods in the Appl. Sc.* (à paraître).

[11] B. PERTHAME et E. TADMOR, A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws, *Comm. in Math. Phys.* (à paraître).

[12] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction diffusion equations*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg- Berlin, 1982.

[13] L. TARTAR, in *Research notes in Mathematics*, 39, *Heriot-Watt Sympos.*, 4, Pitman Press, Boston, London, 1975, p. 136-211.

P.-L. L. : *CEREMADE, Université Paris-IX, place de Lattre de Tassigny*, 75775 *Paris Cedex* 16;

B. P. : *Département de Mathématiques, Université d'Orléans*, B.P. n° 6759, 45067 *Orléans Cedex* 2;

E. T. : *School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv* 69978 *Israel.*